ZUR THEORIE DER GEGENSEITIG MEHRDEUTIGEN ALGEBRAISCHEN EBENENTRANSFORMATIONEN

HABILITATIONSSCHRIFT

ZUR ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI
DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER KGL. BAYERISCHEN
FRIEDRICH-ALEXANDERS-UNIVERSITÄT ERLANGEN

VORGELEGT VON

Dr. RICHARD BALDUS
ASSISTENT AM MATHEMATISCHEN KABINETT
DER UNIVERSITÄT ERLANGEN

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1911

63

ZUR THEORIE DER GEGENSEITIG MEHRDEUTIGEN ALGEBRAISCHEN EBENENTRANSFORMATIONEN

HABILITATIONSSCHRIFT

ZUR ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI
DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER KGL. BAYERISCHEN
FRIEDRICH-ALEXANDERS-UNIVERSITÄT ERLANGEN

VORGELEGT VON

DR. RICHARD BALDUS
ASSISTENT AM MATHEMATISCHEN KABINETT
DER UNIVERSITÄT ERLANGEN

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1911

SONDERABDRUCK
AUS DEM LXXII. BANDE DER MATHEMATISCHEN ANNALEN

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1
§ 1. Die Transformation, ihre Fundamentalpunkte und Fundamentalkurven . . . 3
§ 2. Die Übergangskurven, die Doppelkurven, die Kurven (D_1) und (D_2) 5
§ 3. Die den Geraden entsprechenden Kurven 7
§ 4. Die durch die $[m_1, m_2]$-Korrespondenz bestimmte Strahlenkongruenz K . . . 13
§ 5. Die durch die Kongruenz K in irgend zwei Ebenen bestimmte Korrespondenz 18
§ 6. Die Abbildung der Kongruenz K auf eine Fläche $[\Phi]$ eines linearen dreidimensionalen Raumes 20
§ 7. Die Beziehung zwischen den Ebenen ε_1, ε_2 und der Fläche $[\Phi]$ 24
§ 8. Folgerungen für die $[m_1, m_2]$-Transformation 27
§ 9. Transformationen, die sich in rationale und birationale Transformationen zerlegen lassen 32

Einleitung.

Die Theorie der birationalen, der $[1, 1]$-Transformationen zwischen den Punkten zweier Ebenen ist seit den grundlegenden Arbeiten L. Cremonas weit ausgebaut worden und hat zu zahlreichen schönen Anwendungen geführt. Fast gleichzeitig wurden die rationalen, die $[1, n]$-Transformationen zweier Ebenen untersucht: In allgemeiner Form behandelte zuerst R. de Paolis*) die $[1, 2]$-Korrespondenzen, dessen Untersuchungen von M. Noether**)

*) R. de Paolis. Le trasformazioni piane doppie. Rom. Acc. L. Mem. Ser. III, 1 (1877), S. 511.

**) M. Noether. Über die ein-zweideutigen Ebenentransformationen. Sitzungsber. d. phys. med. Soc. Erlangen 1878. Über eine Klasse von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen. Math. Ann. 33 (1889), S. 525.

weitergeführt wurden*); P. Visalli**), G. Jung***), Ch. A. Scott†) betrachteten allgemeine $[1, n]$-Transformationen.

Da sich die über $[m_1, m_2]$-Transformationen vorliegenden Abhandlungen ausschließlich mit sehr speziellen Fällen befassen, kommen sie für das Folgende nicht in Betracht. Nur zwei Arbeiten von G. Marletta††) seien erwähnt, in denen die allgemeinsten $[2, 2]$-Korrespondenzen untersucht werden, in welchen den Geraden einer Ebene Kegelschnitte oder Kurven 3. Ordnung in der anderen Ebene zugeordnet sind.

Allgemeine gegenseitig mehrdeutige Ebenentransformationen sind noch nicht behandelt, sie sollen im folgenden auf geometrischem Wege untersucht werden. Dabei ist zu bemerken: Die Theorie der birationalen Transformationen stützt sich vor allem auf die Eindeutigkeit, die bei den rationalen Transformationen für eine Ebene aufhört. Demnach sind bei diesen zweierlei Arten von Schlüssen zu unterscheiden, solche, bei welchen die eindeutige Beziehung der ganzen Ebene benützt wird und solche, bei denen das nicht der Fall ist. Nur die zweite Gruppe von Schlüssen läßt sich auf die $[m_1, m_2]$-Korrespondenzen übertragen, was hier in den §§ 1—3 geschieht, die demnach großenteils eine Verallgemeinerung von Schlußweisen und Ergebnissen darstellen, die aus der Theorie der rationalen Transformationen bekannt sind. In den folgenden §§ 4—8 wird ein anderer Weg betreten: Es wurden bisher mehrfach die Strahlensysteme untersucht, welche durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier birational aufeinander bezogenen Ebenen entstehen, am eingehendsten von A. Hirst†††). Während dort die Cremona-Transformationen dem Studium der Kongruenzen dienten, sollen hier die durch die $[m_1, m_2]$-Korrespondenzen definierten Strahlensysteme zur Ableitung von Eigenschaften der Transformationen benützt werden. Dies geschieht durch Abbildungen der Kongruenzen auf Flächen, die es gestatten bereits bekannte Eigenschaften der Abbildung

*) Die Abhandlungen von A. Clebsch, die weiteren von R. de Paolis u. a. sind hier nicht aufgeführt, weil sie speziellere Fälle von [1, 2]-Transformationen zum Gegenstand haben.

**) P. Visalli. Memorie sulle trasformazioni geometriche N-ple. Messina (1884). Sopra le diverse classi delle trasformazioni geometriche piane ν-ple ibid. Diese beiden Arbeiten waren dem Verfasser nur im Auszug zugänglich.

***) G. Jung. Sulle trasformazioni piane multiple. Rom. Acc. Linc. Rend. Ser. (4), 2_2 (1886), S. 302.

†) Ch. A. Scott. Studies in the transformation of plane algebric curves. Quarterly Journal 29 (1898), S. 329, 32 (1901), S. 209.

††) G. Marletta. La trasformazione quadratica (2, 2) fra piani. Circ. Mat. di Palermo. Rend. 17 (1903), S. 173. Le trasformazioni cubiche (2, 2) fra piani. ibid. 17 (1903), S. 371.

†††) A. Hirst. On Cremonian Congruences. London Math. Soc. Proc. 14 (1883), S. 259.

algebraischer Flächen auf mehrfach überdeckte Ebenen für die $[m_1, m_2]$-Korrespondenzen zu verwerten. Die methodischen Ergebnisse dieser Betrachtungen wie auch eine Anzahl neuer numerischer Relationen enthält § 8. § 9 behandelt $[m_1, m_2]$-Transformationen, die sich in eine Folge von rationalen und birationalen Transformationen zerlegen lassen.

§ 1.

Die Transformation, ihre Fundamentalpunkte und Fundamentalkurven.

1. Zwei Ebenen ε_1 und ε_2 seien algebraisch so aufeinander bezogen, daß jedem Punkt von ε_1 m_2 Punkte in ε_2 entsprechen, jedem Punkt vom ε_2 m_1 Punkte in ε_1. Einer Geraden g_1 von ε_1 sei durch die Transformation eine *irreduktible* Kurve n^{ter} Ordnung (G_2) in ε_2 zugeordnet. Einer Geraden g_2 von ε_2 entspreche in ε_1 eine Kurve (G_1). Da den n Schnittpunkten von g_2 und (G_2) die Schnittpunkte von (G_1) und g_1 umkehrbar eindeutig zugeordnet sind, folgt daraus, daß auch die Kurven (G_1) in ε_1, welche den Geraden von ε_2 entsprechen, die Ordnung n haben. p_1 sei das Geschlecht der Kurven (G_1), p_2 das der Kurven (G_2).

2. *Fundamentalpunkte und Fundamentalkurven.* Während unter den birationalen Transformationen die Kollineation die einzige ist, bei der keine Fundamentalpunkte auftreten, gibt es unter den höheren Korrespondenzen wieder solche, welche keine Fundamentalpunkte besitzen. So liefert die Projektion einer algebraischen Fläche von zwei nicht auf ihr liegenden Punkten aus in zwei Ebenen eine solche Transformation der beiden Ebenen*).

Es können in jeder der beiden Ebenen, z. B. in ε_1, Fundamentalpunkte auftreten, dabei lassen sich drei Arten von Fundamentalpunkten unterscheiden:

I. Ein Punkt ist in $\varkappa_1$ Blättern der m_2-fach überdeckten Ebene ε_1 Fundamentalpunkt, als Fundamentalpunkt jedes dieser $\varkappa_1$ Blätter entspricht ihm eine Fundamentalkurve in ε_2, die $\varkappa_1$ Fundamentalkurven sind alle voneinander verschieden. In jedem der $\varkappa_1$ Blätter entsprechen den Richtungen durch den Punkt umkehrbar eindeutig die Punkte der zugeordneten Fundamentalkurve, die $\varkappa_1$ Fundamentalkurven sind demnach alle rational. Einem Punkt einer solchen Fundamentalkurve sind m_1 Punkte zugeordnet, von denen einer in den Fundamentalpunkt fällt, die Fundamentalkurve ist in einem Blatte der m_1-fach überdeckten Ebene ε_2 Fundamentalkurve. Dem

*) Vgl. G. Marletta. La trasformazione ... für den Fall einer Fläche 2. Ordnung.

Fundamentalpunkt entsprechen außer den Fundamentalkurven $m_2 - \varkappa_1$ weitere Punkte in ε_2.

II. Eine Fundamentalkurve ist in l_2 der m_1 Blätter von ε_2 Fundamentalkurve. Bei $l_2 > 1$ sind zwei Fälle möglich: entweder es gehören zur Kurve l_2 getrennte Fundamentalpunkte in ε_1, dann ist sie wieder rational, dies liefert Fundamentalpunkte von der Art I, oder es fallen $\varkappa_1' > 1$ Fundamentalpunkte, welche dieser Kurve zugeordnet sind, in jeder Richtung zusammen.

Dies führt auf eine neue Gruppe von Fundamentalpunkten, die sich von denen der ersten Art dadurch unterscheiden, daß von ihren $\varkappa_1$ Fundamentalkurven $\varkappa_1'$ in eine Kurve von der Ordnung φ_1 zusammenfallen. Jedem Punkt dieser Kurve sind $\varkappa_1'$ Richtungen durch den Fundamentalpunkt zugeordnet, die Kurve braucht nicht mehr rational zu sein. Von den einem ihrer Punkte entsprechenden Punkten fallen $\varkappa_1'$ in den Fundamentalpunkt. Dabei können von den demselben Fundamentalpunkt zugeordneten Fundamentalkurven einige weitere in eine zweite Kurve zusammenfallen usw.

Für spätere Betrachtungen soll die Bezeichnung

$$\sum \varphi_1 = \varphi_\alpha$$

eingeführt werden, die Summe auf sämtliche Fundamentalkurven von ε_2 erstreckt, in welchen mehrere demselben Fundamentalpunkt in ε_1 entsprechende Kurven zusammenfallen. Analog sei für die andere Ebene

$$\sum \varphi_2 = \varphi_\beta .$$

III. In I entsprechen einem Punkt der Fundamentalkurve außer dem Fundamentalpunkt weitere $m_1 - 1$ Punkte, in II fallen $\varkappa_1'$ der einem Punkt der Fundamentalkurve entsprechenden Punkte *in jeder Richtung* im Fundamentalpunkt zusammen. Eine dritte Art von Fundamentalpunkten tritt dann auf, wenn der Punkt für die Fundamentalkurve Fundamentalpunkt in nur einem Blatt ist und trotzdem von den einem Punkt der Fundamentalkurve entsprechenden Punkten zwei in den Fundamentalpunkt fallen. Dann fallen aber diese beiden Punkte *in bestimmter Richtung* zusammen, sie sind unendlich benachbart. Die Fundamentalkurve ist hier wieder rational.

3. Unter der *Ordnung eines Fundamentalpunktes* soll die Summe der Ordnungen der ihm entsprechenden Fundamentalkurven verstanden werden, wobei jede Kurve so oft gezählt wird, als die Anzahl der Blätter beträgt, in denen sie für diesen Punkt Fundamentalkurve ist. Die Ebene ε_1 enthalte α_i Fundamentalpunkte i^{ter} Ordnung $(i = 1, 2, \cdots)$, entsprechend sollen in ε_2 β_i Fundamentalpunkte i^{ter} Ordnung liegen.

$\Sigma\varkappa_1$ heiße die *Anzahl der Fundamentalpunkte* von ε_1. Dies ist die Summe der Fundamentalpunkte, jeder Punkt so oft gezählt, als die Anzahl der Blätter von ε_1 beträgt, in denen er Fundamentalpunkt ist. Analog ist dann $\Sigma\varkappa_2$ die Anzahl der Fundamentalpunkte in ε_2.

4. *Einschränkende Voraussetzungen.* Um die folgenden Betrachtungen nicht zu umständlich zu gestalten, soll vorausgesetzt werden, daß in keinem Fundamentalpunkt eine Fundamentalrichtung auftritt, d. h. es sollen nicht alle Kurven, welche den Kurven der anderen Ebene entsprechen, in einem der Fundamentalpunkte eine feste Gerade berühren (dies wäre der Fall, wenn in einem Blatt einer der Ebenen zwei Fundamentalpunkte unendlich benachbart wären). Ferner soll vorausgesetzt werden, daß bei den Fundamentalpunkten 2. Art die $\varkappa_1'$ Richtungen durch den Fundamentalpunkt, welche einem Punkt der Fundamentalkurve entsprechen, im allgemeinen verschieden sind.

§ 2.

Die Übergangskurven, die Doppelkurven, die Kurven (D_1) und (D_2).

5. *Übergangskurven und Doppelkurven.* Einer Geraden g_1 in ε_1 entspricht nach Nr. 1 eine Kurve (G_2) vom Geschlecht p_2 in ε_2. Da jedem Punkt von g_1 m_2 Punkte auf (G_2) entsprechen, jedem Punkt von (G_2) ein Punkt auf g_1 zugeordnet ist, beträgt nach der bekannten Formel von H. G. Zeuthen die Anzahl der Koinzidenzen auf (G_2)

$$2(m_2 + p_2 - 1).$$

Auf irgend einer Geraden g_1 in ε_1 liegen also soviele Punkte, von deren entsprechenden in ε_2 zwei in bestimmter Richtung zusammenfallen. Diese Punkte in ε_1 bilden die Übergangskurve oder Grenzkurve von ε_1, während die Punkte von ε_2, in denen das Zusammenfallen stattfindet, die Doppelkurve von ε_2 bilden. Jeder Punkt der Doppelkurve enthält eine ausgezeichnete, mit der Tangente nicht zusammenfallende Richtung, in welcher sich die beiden Punkte vereinigen.

Die den Fundamentalpunkten 3. Art zugeordneten Fundamentalkurven hatten die Eigenschaft der Übergangskurve (Nr. 2). Die Übergangskurve in ε_1 von der Ordnung $2(m_2 + p_2 - 1)$ zerfällt also in die Fundamentalkurven vom Typus III in ε_1 und in eine Restkurve. Die diesen Fundamentalkurven zugeordneten Fundamentalpunkte können als unendlich kleine Doppelkurven aufgefaßt werden. Der Restkurve entspricht die eigentliche Doppelkurve von ε_2, und diese beiden Kurven sind umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen und haben folglich dasselbe Geschlecht. Die Restkurve

werde als Übergangskurve erster Art bezeichnet, während diese Fundamentalkurven die Übergangskurve zweiter Art bilden.

Die gesamte Übergangskurve von ε_1 habe die Klasse k_1 und s_1 stationäre Tangenten, sie gehe λ_1-mal durch einen Fundamentalpunkt der in ihr zusammenhängenden Blätter hindurch. n_2 sei die Ordnung der Doppelkurve von ε_2. Die entsprechenden Zahlen für die Übergangskurve in ε_2 sind dann k_2, s_2, λ_2, die Ordnung der Doppelkurve von ε_1 ist n_1.

6. *Die Kurven* (D_1) *und* (D_2).*) Ein Punkt der Übergangskurve einer der beiden Ebenen, etwa von ε_1, hatte die Eigenschaft, daß ihm als Punkt in zwei Blättern von ε_1 in der Ebene ε_2 zwei *in bestimmter Richtung* in einem Punkt der Doppelkurve zusammenfallende Punkte entsprechen. Diese zusammenfallenden Punkte liegen in demselben Blatt von ε_2, demgemäß fällt von den m_1 diesem Punkt der Doppelkurve entsprechenden Punkten nur einer in den Punkt der Übergangskurve. Liegt dagegen in ε_1 ein Punkt P_1, dem als Punkt in zwei Blättern zwei Punkte in ε_2 entsprechen, die, ebenfalls in zwei Blättern liegend, in einem Punkt P_2 *in jeder Richtung* zusammenfallen, dann fallen auch von den m_1 dem Punkt P_2 entsprechenden Punkten zwei in P_1 in jeder Richtung zusammen. Diese Punkte P_1 in ε_1 sollen eine Kurve (D_1) von der Ordnung d_1 bilden, die Punkte P_2 in ε_2 eine Kurve (D_2) von der Ordnung d_2.**)

7. (D_1) und (D_2) sind umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen. Einem P_1 unendlich benachbarten Punkt entsprechen zwei P_2 unendlich benachbarte Punkte, d. h. jeder Richtung durch P_1 sind zwei Richtungen durch P_2 zugeordnet und ebenso jeder Richtung durch P_2 zwei solche durch P_1. Betrachtet man im Strahlenbüschel mit dem Scheitel P_1 zwei Strahlen dann als korrespondierend, wenn ihre Richtung derselben Richtung durch P_2 entspricht, dann erhält man im Strahlenbüschel eine involutorische [2, 2]-Korrespondenz, deren vier Koinzidenzen sich in der folgenden Weise ergeben: Der Tangentenrichtung von (D_1) in P_1 entspricht die Tangentenrichtung in P_2 von (D_2). Diese liefert eine Koinzidenz im Strahlenbüschel, die doppelt zählt, weil der Tangente kein von ihr verschiedener Strahl des Büschels entspricht. Fällt ein anderer Strahl durch P_1 mit einem korrespondierenden zusammen, dann entsprechen seiner

*) Diese Kurven sind noch nirgends berücksichtigt worden.

**) In der zu Anfang von Nr. 2 erwähnten Transformation sind die Projektionen einer Doppelkurve der algebraischen Fläche solche Kurven (D_1) bez. (D_2). Wie man einen Fundamentalpunkt 3. Art als unendlich kleine Doppelkurve auffassen kann, so kann man einen Fundamentalpunkt 2. Art, für den $\varkappa_1' = 2$ ist, als unendlich kleine Kurve (D_1) betrachten.

Richtung, wie man unschwer erkennt, zwei zusammenfallende Richtungen durch P_2, woraus folgt, daß auch diese Koinzidenz doppelt zählt und keine weiteren Koinzidenzen auftreten. D. h.

In jedem Punkt P_1 von (D_1) gibt es eine von der Tangente verschiedene ausgezeichnete Richtung, der eine ebensolche ausgezeichnete Richtung in P_2 auf (D_2) entspricht. Dem in der ausgezeichneten Richtung zu P_1 unendlich benachbarten Punkt entsprechen in ε_2 Punkte, von denen zwei in der ausgezeichneten Richtung zu P_2 unendlich benachbart sind, und umgekehrt.

Die einer Geraden g_1 entsprechende Kurve (G_2) hat in den Punkten, welche den Schnittpunkten von g_1 mit (D_1) entsprechen, Doppelpunkte, in jedem dieser Punkte fallen zwei demselben Punkt von g_1 entsprechende Punkte zusammen. Diese Koinzidenzen zählen, weil sie in Doppelpunkten liegen, in der zu Anfang von Nr. 5 verwendeten Zeuthenschen Formel nicht mit, die Kurve (D_1) erniedrigt also die Ordnung der Übergangskurve nicht.

8. *Einschränkende Voraussetzungen.* Als weitere Voraussetzungen seien die folgenden eingeführt.

a) Es sollen keine den Kurven (D_1), (D_2) analogen Kurven auftreten, bei welchen jeder Richtung durch einen Punkt der einen Kurve zwei zusammenfallende Richtungen durch den entsprechenden Punkt der anderen Kurve zugeordnet sind.*)

b) Ebenso soll keine der Ebenen den Kurven (D_1) und (D_2) analoge Kurven besitzen, bei denen in jedem Kurvenpunkt drei oder mehr Punkte zusammenfallen.**)

c) Keine der Ebenen enthalte ferner eine Kurve von der Eigenschaft, daß von den einem ihrer Punkte entsprechenden Punkten drei oder mehr in bestimmter Richtung zusammenfallen. Schon in Nr. 2, III wurde nur der Fall berücksichtigt, in dem zwei Punkte unendlich benachbart sind.

§ 3.

Die den Geraden entsprechenden Kurven.

9. *Allgemeine Kurven* (G_1).***) Einem Punkt A_1 in ε_1 seien in ε_2 die Punkte $A_2^{(1)}, A_2^{(2)}, \cdots, A_2^{(m_2)}$ zugeordnet, einem Punkt B_1 die Punkte

*) In der Transformation von Nr. 2 wären die Projektionen einer Kuspidalkurve der algebraischen Fläche solche Kurven.

**) Als unendlich kleine Kurven dieser Art könnte man die Fundamentalpunkte vom Typus III auffassen, bei denen $\varkappa_1' > 2$ ist.

***) Die folgenden Resultate werden nur für die eine Ebene abgeleitet, durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 erhält man die für die andere Ebene geltenden Betrachtungen.

$B_2^{(1)}, B_2^{(2)}, \cdots, B_2^{(m_2)}$. Einer Geraden g_2 von ε_2 entspricht nach Nr. 1 in ε_1 eine Kurve (G_1) von der Ordnung n und dem Geschlecht p_1. Enthält g_2 je einen der Punkte $A_2^{(\nu)}$ und $B_2^{(\mu)}$, dann und nur dann liegen die Punkte A_1 und B_1 auf (G_1), d. h.

In ε_1 gibt es m_2^2 Kurven (G_1), welche durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen.

Sind die Punkte A_1 und B_1 auf einer Geraden h_1 unendlich benachbart, dann sind zwei demselben Blatt von ε_1 entsprechende Punkte $A_2^{(\nu)}$ und $B_2^{(\nu)}$ ebenfalls unendlich benachbart. Die m_2 Geraden g_2, auf welchen diese Punkte zusammenfallen, liefern die Kurven (G_1), welche h_1 im Punkt A_1, B_1 berühren. Daraus folgt:

m_2 Kurven (G_1) berühren eine Gerade in einem gegebenen Punkt.

Die ∞^1 Kurven (G_1), welche durch A_1 hindurchgehen, bilden m_2 einfach unendliche rationale Scharen, die den Strahlenbüscheln mit den Scheiteln $A_2^{(\nu)}$ entsprechen, jede vom Index m_2. Je zwei dieser Scharen haben eine gemeinsame Kurve, die in A_1 einen Doppelpunkt hat, deren zugeordnete Gerade g_2 durch zwei der Punkte $A_2^{(\nu)}$ hindurchgeht. Daraus, daß eine Kurve (G_1) in einem Punkt A_1 dann einen Doppelpunkt hat, wenn die entsprechende Gerade g_2 zwei der Punkte $A_2^{(\nu)}$ enthält, ergibt sich:

$\frac{1}{2} m_2(m_2-1)$ Kurven (G_1) haben in einem gegebenen Punkt einen Doppelpunkt.

10. Hat eine Kurve (G_1) in einem Punkt eine Spitze, dann entsprechen diesem Punkt zwei unendlich benachbarte Punkte von g_2. Da auf einer Geraden in ε_2 im allgemeinen keine zwei unendlich benachbarten Punkte liegen, die demselben Punkt in ε_1 entsprechen, haben die Kurven (G_1) im allgemeinen keine Spitzen.*) Folglich ist

$$2(n+p_1-1)$$

ihre Klasse, sie haben

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-p_1 \quad \text{Doppelpunkte,}$$

$$2n^2+4np_1+\frac{1}{2}p_1^2-10n_1-14p_1+12 \quad \text{Doppeltangenten,}$$

$$3n+6(p_1-1) \quad \text{Wendetangenten.}$$

Der Geraden g_1 sei die Kurve (G_2) zugeordnet, der Geraden g_2 die Kurve (G_1). Wird (G_2) von g_2 berührt, dann berühren sich auch g_1 und (G_1), demnach haben alle (G_1), welche g_1 berühren, die Tangenten von (G_2) zu

*) Das ist nicht mehr der Fall, wenn man die in Nr. 4 und Nr. 8a eingeführten Voraussetzungen fallen läßt.

entsprechenden Geraden. Da einem Punkt von ε_1 m_2 Punkte in ε_2 zugeordnet sind, folgt aus der Klasse $2(n+p_2-1)$ von (G_2):

Es gibt $2m_2(n+p_2-1)$ *Kurven* (G_1), *welche eine gegebene Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen.*

Die Kurven (G_1), welche eine gegebene Gerade berühren, bilden eine einfach unendliche Schar vom Geschlecht p_2 und vom Index $2m_2(n+p_2-1)$. Aus der Zahl der gemeinsamen Tangenten zweier Kurven (G_2) ergibt sich:

$4(n+p_2-1)^2$ *Kurven* (G_1) *berühren zwei gegebene Gerade.*

Die Wendetangenten von (G_2) liefern die Kurven (G_1), welche mit g_1 drei unendlich benachbarte Punkte gemeinsam haben, die Doppeltangenten die Kurven (G_1), welche g_1 doppelt berühren, d. h.

$3n+6(p_2-1)$ *Kurven* (G_1) *haben eine gegebene Gerade zur Wendetangente,* $2n^2+4np_2+\frac{1}{2}p_2^2-10n_2-14p_2+12$ *zur Doppeltangente.**)

11. Schneidet g_2 die Doppelkurve in einem Punkt (nicht in der ausgezeichneten Richtung dieses Punktes), dann berührt (G_1) im entsprechenden Punkt die Übergangskurve 1. Art (Nr. 5). Die Kurven (G_1) berühren demnach die Übergangskurve 1. Art in n_2 Punkten, die Übergangskurve 2. Art im allgemeinen nicht. Trifft g_2 die Kurve (D_2) in einem Punkte (nicht in der ausgezeichneten Richtung dieses Punktes), dann hat (G_1) im entsprechenden Punkt von (D_1) einen Doppelpunkt (Nr. 6), folglich haben die Kurven (G_1) je d_2 Doppelpunkte auf (D_1). Schneidet g_2 die Übergangskurve 1. Art, dann überschreitet (G_1) den entsprechenden Punkt der Doppelkurve in der ausgezeichneten Richtung, trifft g_2 in einem Punkt die Übergangskurve 2. Art, dann geht (G_1) in der diesem Punkt entsprechenden Richtung durch den zugeordneten Fundamentalpunkt hindurch.

Durch jeden Fundamentalpunkt geht eine Kurve (G_1) mit soviel Ästen hindurch, als die Ordnung des Fundamentalpunktes beträgt (Nr. 3), in Richtungen, welche den Schnittpunkten von g_2 mit den zugeordneten Fundamentalkurven entsprechen.

Ist eine Kurve von der Ordnung f in ε_1 für m_2 Punkte in ε_2 Fundamentalkurve (jeder Punkt in je einem Blatt gerechnet), dann entsprechen jedem ihrer Punkte, der nicht selbst Fundamentalpunkt ist, diese m_2 Fundamentalpunkte. Die Schnittpunkte einer Kurve (G_1) mit dieser Kurve können demnach nur durch die Schnitte von g_2 mit Fundamentalkurven entstehen, deren Fundamentalpunkte auf dieser Fundamentalkurve f^{ter} Ordnung liegen; demnach ist die Ordnungssumme der auf ihr liegenden Fundamentalpunkte nf.

*) Zu Nr. 9 und Nr. 10 vgl. R. de Paolis a. a. O. § 3 Nr. 6 für den Fall einer [1, 2]-Transformation.

12. *Spezielle Kurven* (G_1). Geht g_2 durch einen Fundamentalpunkt i^{ter} Ordnung hindurch, dann zerfällt (G_1) in die zugeordneten Fundamentalkurven und eine Restkurve $n-i^{\text{ter}}$ Ordnung. Wenn g_2 einen Fundamentalpunkt 3. Art trifft (der als unendlich kleine Doppelkurve aufgefaßt werden kann, Nr. 5), dann berührt die Restkurve die Fundamentalkurve in dem der Richtung von g_2 entsprechenden Punkt. Es gibt also eine Kurve (G_1), welche durch die Übergangskurve 2. Art in einem gegebenen Punkt berührt. Ist g_2 Tangente einer Fundamentalkurve 1. oder 2. Art, dann hat (G_1) in den der Fundamentalkurve entsprechenden Fundamentalpunkten soviele Spitzen, als die Anzahl der Blätter von ε_2 beträgt, in denen die Kurve Fundamentalkurve ist.

Berührt g_2 eine Fundamentalkurve 3. Art im Punkt A_2, dann schneidet eine beliebige Gerade g_1 durch den zugeordneten Fundamentalpunkt die Kurve (G_1) in zwei zusammenfallenden Punkten, weil die ihr entsprechende Kurve (G_2) in die Fundamentalkurve und eine Restkurve zerfällt und die letztere g_2 außerhalb A_2 trifft. Nur wenn die Richtung von g_1 dem Punkt A_2 entspricht, berührt nach dem zu Anfang dieser Nummer Gesagten auch die Restkurve die Gerade in A_2, die Kurve (G_1) hat mit dieser Geraden g_1 vier im Fundamentalpunkt zusammenfallende Schnittpunkte. Daraus folgt:

Den Tangenten einer Fundamentalkurve 3. Art von ε_2 entsprechen Kurven (G_1), die sich im zugeordneten Fundamentalpunkt in der dem Berührungspunkt entsprechenden Richtung selbst berühren.

13. Geht g_2 durch einen Punkt der Doppelkurve in der ausgezeichneten Richtung hindurch, dann hat (G_1) in dem entsprechenden Punkt der Übergangskurve 1. Art eine Spitze, daher ist die Zahl der Kurven (G_1), die auf der Übungskurve 1. Art eine Spitze haben und durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen, m_2-mal so groß als die Anzahl der ausgezeichneten Richtungen der Doppelkurve von ε_2, die durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen. Da allen Geraden in ε_2 durch einen Punkt der Doppelkurve Kurven (G_1) entsprechen, welche die Übergangskurve 1. Art im entsprechenden Punkt berühren, gibt es m_2 Kurven (G_1), welche durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen und die Übergangskurve 1. Art in einem gegebenen Punkt berühren. Es gibt eine Kurve (G_1), welche die Übergangskurve 1. Art in zwei gegebenen Punkten berührt.

Fast wörtlich wie bei R. de Paolis ergibt sich:

Ist g_2 eine Tangente der Doppelkurve, dann hat die Kurve (G_1) vier unendlich benachbarte Punkte mit der Übergangskurve 1. Art gemeinsam; berührt g_2 die Übergangskurve 1. Art in A_2, dann hat (G_1) im entsprechenden Punkt A_1 auf der Doppelkurve einen Doppelpunkt; einer stationären

*Tangente in einem Punkt B_2 der Übergangskurve ist eine Kurve (G_1) zugeordnet, die im entsprechenden Punkt B_1 der Doppelkurve eine Spitze hat, mit der Tangente der Doppelkurve in B_1 als Haupttangente.**)

Schneidet g_2 in einem Punkt die Kurve (D_2), dann hat (G_1) im entsprechenden Punkt von (D_1) einen Doppelpunkt. Daraus folgt:

Einer Tangente g_2 von (D_2) im Punkt A_2 entspricht einer Kurve (G_1), die im zugeordneten Punkt A_1 von (D_1) sich selbst und die Kurve (D_1) berührt.

Aus Nr. 7 ergibt sich:

Geht g_2 durch einen Punkt B_2 von (D_2) in der ausgezeichneten Richtung hindurch, dann berührt sich die entsprechende Kurve (G_1) im Punkt A_1 von (D_1) in der ausgezeichneten Richtung dieses Punktes.

14. *Die den Kurven (G_1) entsprechenden Kurven.* Den ns Schnittpunkten einer Kurve (C_1) von der s^{ten} Ordnung in ε_1 mit einer Kurve (G_1) sind die Schnittpunkte der entsprechenden Kurve (C_2) mit g_2 umkehrbar eindeutig zugeordnet. Einer Kurve s^{ter} Ordnung der einen Ebene entspricht demnach eine Kurve ns^{ter} Ordnung in der anderen Ebene.

Einer Geraden g_2 entspricht in ε_1 eine Kurve (G_1) und dieser wieder in ε_2 eine Kurve $(G_2{}^{n^2})$ von der Ordnung n^2. Diese besteht:

a) aus der m_1-fachen Geraden g_1,

b) aus den i-fachen Fundamentalkurven der Fundamentalpunkte i^{ter} Ordnung von ε_1, diese Kurven haben die Ordnungssumme $\Sigma i^2\alpha_i$ (Nr. 3),

c) aus einer Restkurve (R_2) von der Ordnung $n^2 - m_1 - \Sigma i^2\alpha_i$.

Entspricht der Geraden g_2' die Kurve (G_1'), dann schneiden sich (G_1) und (G_1') in n^2 Punkten. $\Sigma i^2\alpha_i$ dieser Schnittpunkte fallen in die Fundamentalpunkte von ε_1, m_1 in die dem Schnittpunkt von g_2 und g_2' entsprechenden Punkte, die übrigen Schnittpunkte rühren von den $n^2 - m_1 - \Sigma i^2\alpha_i$ Schnittpunkten von (R_2) und g_2' her.

15. *Schnittpunkte von (R_2) und g_2.* Schneidet g_2 die Doppelkurve in einem Punkt A_2, dann berührt (G_1) die Übergangskurve 1. Art im entsprechenden Punkt A_1. Beschränkt man sich für den Augenblick auf die Punkte von (G_1) in der Nähe von A_1, dann überdecken ihre entsprechenden Punkte die Gerade g_2 nur einfach, und zwar in der Nähe von A_2. Irgend einer Geraden g_2' durch A_2 entspricht eine Kurve (G_1'), welche ebenfalls die Übergangskurve in A_1 berührt, in A_1 also zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit (G_1) hat. Auf der Gesamtkurve $(G_2{}^{n^2})$ entsteht demnach ein Doppelpunkt in A_2, und zwar durch die Punkte, welche den

*) R. de Paolis a. a. O. § 5 Nr. 12.

in der Nähe von A_1 liegenden Punkten der Kurve (G_1) entsprechen. Dem A_1 unendlich benachbarten Punkt von (G_1) sind m_2 Punkte zugeordnet, von denen zwei dem Punkt A_2 unendlich benachbart sind, der eine auf g_2, der andere in einer davon verschiedenen Richtung; in dieser Richtung geht (R_2) durch A_2 hindurch.

Die n_2 Schnittpunkte von g_2 mit der Doppelkurve sind zugleich Schnittpunkte von g_2 und (R_2).

16. Schneidet g_2 in B_2 die Kurve (D_2), dann hat (G_1) im entsprechenden Punkt B_1 auf (D_1) einen Doppelpunkt. Jedem der beiden B_1 unendlich benachbarten Punkte von (G_1) sind m_2 Punkte zugeordnet, von denen zwei dem Punkt B_2 unendlich benachbart sind, der eine auf g_2, der andere in einer davon verschiedenen Richtung. Einer beliebigen Geraden g_2' durch B_2 ist eine Kurve (G_1') zugeordnet, die ebenfalls in B_1 einen Doppelpunkt, also vier Schnittpunkte mit (G_1) hat. Diesen entspricht der Punkt B_2 als Punkt von g_2 doppelt zählend und außerdem B_2 doppelt zählend als Punkt von (R_2), d. h.

(R_2) hat in jedem Schnittpunkt von g_2 mit (D_2) einen Doppelpunkt.

Ein Doppelpunkt P_1 von (G_1) außerhalb eines Fundamentalpunktes und außerhalb (D_1) entsteht dann, wenn von den m_2 dem Punkt P_1 entsprechenden Punkten zwei getrennte, $P_2^{(\mu)}$ und $P_2^{(\nu)}$, auf g_2 liegen. Q_1 sei einer der beiden dem Punkt P_1 auf (G_1) unendlich benachbarten Punkte. Unter den m_2 ihm zugeordneten Punkten sind $Q_2^{(\mu)}$ und $Q_2^{(\nu)}$ beziehungsweise $P_2^{(\mu)}$ und $P_2^{(\nu)}$ unendlich benachbart, einer, etwa $Q_2^{(\mu)}$, auf g_2, der andere $Q_2^{(\nu)}$ in einer von g_2 verschiedenen Richtung. Ist dann Q_1' der zweite dem Punkt P_1 auf (G_1) unendlich benachbarte Punkt, dann ist $Q_2'^{(\nu)}$ dem Punkt $P_2^{(\nu)}$ auf g_2 unendlich benachbart, $Q_2'^{(\mu)}$ dem Punkt $P_2^{(\mu)}$ in einer nicht mit g_2 zusammenfallenden Richtung. P_1 führt demnach auf zwei Schnittpunkte, $P_2^{(\mu)}$ und $P_2^{(\nu)}$, von g_2 und (R_2).

Jeder Doppelpunkt von (G_1) außerhalb eines Fundamentalpunktes und außerhalb (D_1) bestimmt zwei getrennte einfache Schnittpunkte von g_2 und (R_2).

Es sei A_2 ein Schnittpunkt von (R_2) und g_2 außerhalb der Doppelkurve und der Kurve (D_2). Die m_1 Punkte $A_1^{(\nu)}$ liegen auf (G_1). Ist B_2 der dem Punkt A_2 unendlich benachbarte Punkt auf g_2, dann sind die Punkte $B_1^{(\nu)}$ die den Punkten $A_1^{(\nu)}$ unendlich benachbarten Punkte auf (G_1). Dem zu B_2 auf (R_2) unendlich benachbarten Punkt C_2 entspricht ein Punkt $C_1^{(\lambda)}$ auf (G_1), der dem Punkt $A_1^{(\lambda)}$ unendlich benachbart ist und zwar in anderer Richtung als $B_1^{(\lambda)}$, weil sonst A_2 ein Punkt der Doppelkurve wäre. Folglich muß $A_1^{(\lambda)}$ ein Doppelpunkt von (G_1) sein, der nicht auf (D_1) liegt, da A_2 kein Punkt von (D_2) sein sollte. Da $A_1^{(\lambda)}$ auch in

keinen Fundamentalpunkt fällt, folgt hieraus in Verbindung mit dem vorigen Resultat:

Jeder Schnittpunkt von g_2 und (R_2), der nicht auf der Doppelkurve oder auf (D_2) liegt, liefert einen Doppelpunkt von (G_1), der auf einen zweiten ebensolchen Schnittpunkt von g_2 und (R_2) führt.

17. *Eine Folgerung für die Fundamentalpunkte.* Die $n^2 - m_1 - \Sigma i^2 \alpha_i$ Schnittpunkte von (R_2) und g_2 (Nr. 14, c)) setzen sich zusammen:

a) aus den n_2 Schnittpunkten von g_2 mit der Doppelkurve (Nr. 15),

b) aus den d_2 Schnittpunkten von g_2 mit der Kurve (D_2), jeder doppelt zählend (Nr. 16),

c) aus weiteren $n^2 - m_1 - \Sigma i^2 \alpha_i - n_2 - 2d_2$ Schnittpunkten.

Die Schnittpunkte der Gruppe c führen nach Nr. 16 zu je zweien auf einen Doppelpunkt, und zwar auf alle Doppelpunkte von (G_1) außerhalb (D_1) und außerhalb der Fundamentalpunkte. Die Zahl dieser Doppelpunkte ist

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - p_1 - \sum \binom{i}{2} \alpha_i - d_2 \text{ (Nr. 10 und Nr. 11)},$$

daraus folgt

$$n^2 - m_1 - \sum i^2 \alpha_i - n_2 - 2d_2 = (n-1)(n-2) - 2p_1 - \sum i(i-1)\alpha_i - 2d_2,$$

$$\text{(Ia)} \qquad \sum i \alpha_i = 3n - m_1 + 2p_1 - n_2 - 2,$$

$$\text{(Ib)} \qquad \sum i \beta_i = 3n - m_2 + 2p_2 - n_1 - 2.$$

Die zweite Formel ergibt sich durch Vertauschung der Ebenen ε_1 und ε_2*). Die Formeln (I) gelten unabhängig von der Voraussetzung Nr. 8, b).

§ 4.

Die durch die $[m_1, m_2]$-Korrespondenz bestimmte Strahlenkongruenz K.**)

18. Die vorhergehenden Betrachtungen dienten dem Studium der $[m_1, m_2]$-Korrespondenzen unter alleiniger Benützung der ineinander transformierten Ebenen ε_1 und ε_2. Von jetzt ab sollen unter Verwertung bis-

*) Für die birationalen Transformationen erhält man hieraus die bekannte Relation $\Sigma i \alpha_i = \Sigma i \beta_i = 3(n-1)$. R. de Paolis gibt a. a. O. § 3, Nr. 7, VI und § 5, Nr. 11 (5) die den Formeln (I) entsprechenden Ausdrücke für den Fall einer [1, 2]-Korrespondenz. In der zweiten Abhandlung von G. Marletta Kap. II, § 4 finden sich die aus I. für den Fall [2, 2] folgenden Formeln.

**) Dieser Paragraph enthält Resultate für $[m_1, m_2]$-Korrespondenzen, deren entsprechende für birationale Transformationen A. Hirst a. a. O. auf teilweise anderem Weg ableitet.

heriger Ergebnisse Gebilde außerhalb dieser beiden Ebenen untersucht werden, die aus den Korrespondenzen abgeleitet werden können und ihrerseits größtenteils neue Rückschlüsse auf Eigenschaften der Transformationen zulassen.

Da im folgenden mehrfach Strahlenkongruenzen auftreten, sei es gestattet einige auf sie bezügliche Formeln anzuführen: Bezeichnet man die Ordnung einer algebraischen Kongruenz K mit μ, die Klasse mit ν, die Ordnung des Ortes ihrer Brennpunkte mit μ_0, die Klasse des Ortes der Brennebenen mit ν_0, die Ordnung der Regelfläche der Doppelstrahlen von K mit δ*), den Rang der Kongruenz mit ϱ, dann gelten die Gleichungen

$$\mu_0 = 2\nu(\mu - 1) - 2(\varrho + \delta), \tag{1}$$

$$\nu_0 = 2\mu(\nu - 1) - 2(\varrho + \delta), \tag{2}$$

aus ihnen folgt

$$\mu_0 - \nu_0 = 2(\mu - \nu). \tag{3}$$

Die Regelfläche, in welcher die Kongruenz von einem linearen Komplex geschnitten wird, hat die Ordnung $\mu + \nu$ und δ Doppelerzeugende, ein ebener Schnitt der Regelfläche hat das Geschlecht

$$\pi = (\mu - 1)(\nu - 1) - (\varrho + \delta). \tag{4}$$

19. *Einschränkende Voraussetzung.* Für das Folgende seien alle Zahlen $\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$ (Nr. 2, II.) < 3 vorausgesetzt, d. h. eine Fundamentalkurve 2. Art ist für einen Fundamentalpunkt nur in zwei Blättern Fundamentalkurve. Diese Einschränkung, ebenso wie die in Nr. 8, b), ist der Kürze halber eingeführt und ändert nichts Prinzipielles an den folgenden Betrachtungen.

20. *Die Kongruenz* K, *ihre Ordnung und Klasse.* Die beiden Ebenen sollen so zueinander liegen, daß ihre Schnittlinie in jeder der beiden Ebenen eine bezüglich der Korrespondenz allgemein liegende Gerade ist, sie soll durch keinen Fundamentalpunkt hindurchgehen, zu keiner der ausgezeichneten Kurven (Fundamentalkurven, Doppelkurven, Übergangskurven, Kurven (D_1) und (D_2)) spezielle Lage haben, ferner mögen auf ihr keine entsprechenden Punkte der beiden Ebenen zusammenfallen.

Verbindet man die zugeordneten Punkte der beiden Ebenen durch Gerade, dann bilden diese eine algebraische Strahlenkongruenz K, die näher untersucht werden soll.

Eine beliebige Ebene α schneidet ε_1 in einer Geraden g_1. Die n Schnittpunkte der entsprechenden Kurve (G_2) mit α liefern n Kongruenzstrahlen in α, K hat demnach die Klasse n.

*) Regelflächen von stationären Strahlen der Kongruenzen treten im folgenden nicht auf und sind deshalb hier nicht berücksichtigt.

Projiziert man aus einem beliebigen Punkt P des Raumes die beiden korrespondierenden Felder ε_1 und ε_2, dann entsteht in dem Strahlenbündel um P eine $[m_1, m_2]$-Korrespondenz, in der den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel P die Strahlen eines Kegels n^{ter} Ordnung mit der Spitze P entsprechen. Die Koinzidenzen dieser Korrespondenz liefern die Kongruenzstrahlen durch P. Da P allgemein liegend kein singulärer Punkt für K ist, gibt es nur endlich viele Koinzidenzen, deren Zahl dann bekanntlich $n + m_1 + m_2$ ist.

Die Kongruenz K *hat die Ordnung* $\mu = n + m_1 + m_2$ *und die Klasse* $\nu = n$.

Die Schnittregelfläche von K mit einem linearen Komplex hat demnach die Ordnung $2n + m_1 + m_2$.

21. *Doppelstrahlen von* K. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von (D_1) und (D_2) bilden eine Regelfläche von Doppelstrahlen der Kongruenz von der Ordnung $d_1 + d_2$, für welche ε_1 d_2-fache Tangentialebene ist, da jeder Schnittpunkt von (D_2) mit der Schnittlinie $(\varepsilon_1 \times \varepsilon_2)$ eine Erzeugende der Regelfläche in ε_1 liefert. Entsprechend ist ε_2 d_1-fache Tangentialebene dieser Regelfläche von Doppelstrahlen.

Ist eine Kurve für einen Fundamentalpunkt Fundamentalkurve in zwei Blättern (vgl. Nr. 19), dann ist der Kegel, welcher die Kurve aus dem Fundamentalpunkt projiziert, ein Kegel von Doppelstrahlen der Kongruenz K*). Diese Kegel liefern zusammen eine Regelfläche von der Ordnung $\varphi_\alpha + \varphi_\beta$ von Doppelstrahlen (Nr. 2, II.), die Ebene ε_1 enthält φ_α, die Ebene ε_2 φ_β Erzeugende dieser Gesamtfläche.

Die Kongruenz K *besitzt eine zerfallende Regelfläche von Doppelstrahlen von der Ordnung* $\delta = d_1 + d_2 + \varphi_\alpha + \varphi_\beta$.

Neben der Regelfläche von Doppelstrahlen hat K noch einzelne mehrfache Strahlen; zu diesen gehört die Schnittlinie $(\varepsilon_1 \times \varepsilon_2)$ als n-facher Strahl. In der $[m_1, m_2]$-Korrespondenz können auch einzelne Punkte außerhalb (D_1) und (D_2) auftreten, von deren entsprechenden zwei in jeder Richtung zusammenfallen, diese führen auf einzelne Doppelstrahlen der Kongruenz. Mehrfache Strahlen liefern ferner die vielfachen Punkte der Fundamentalkurven 1. und 3. Art, endlich bestimmen diejenigen Punkte der Schnittlinie $(\varepsilon_1 \times \varepsilon_2)$ Doppelstrahlen, welche mit zweien ihrer entsprechenden in einer Geraden liegen. Weitere mehrfache Strahlen treten nicht auf.

Die Kongruenz K enthält keine Regelfläche von stationären Strahlen.**)

---

*) Die Voraussetzungen 8, b) und Nr. 19 sollen das Auftreten einer Regelfläche von k'-fachen Strahlen für $k' > 2$ verhindern.

**) Eine solche wäre vorhanden, wenn man die Voraussetzungen von Nr. 4 und Nr. 8, a) fallen ließe.

22. *Die singulären Ebenen ε_1 und ε_2 der Kongruenz.* ε_1 ist singuläre Ebene der Kongruenz, denn der Schnittlinie e von ε_1 und ε_2 entspricht, wenn man sie als Gerade e_2 auffaßt, eine Kurve (E_1) von der Ordnung n und vom Geschlecht p_1. Zwischen den Punkten von e_2 und (E_1) besteht eine $[1, m_1]$-Korrespondenz, die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser beiden Kurven umhüllen eine Kurve (K_1) von der Klasse $n + m_1$ und dem Geschlecht p_1. e_2 ist n-fache Tangente von (K_1), und zwar in den Punkten, welche den Schnittpunkten von (E_1) mit e_2 auf der Geraden e_2 zugeordnet sind. Die Berührungspunkte von e_2 mit (K_1) liefern $2n$ Schnittpunkte von e_2 und (K_1), außerdem sind die $2(m_1 + p_1 - 1)$ Schnittpunkte von e_2 mit der Übergangskurve von ε_2 zugleich einfache Schnittpunkte von (K_1) und e_2, die Ordnung von (K_1) ist demnach $2(n + m_1 + p_1 - 1)$. Aus Ordnung, Klasse und Geschlecht von (K_1) folgen die übrigen charakteristischen Zahlen der Kurve. Speziell ergibt sich, daß (K_1), was auch direkt einzusehen ist, keine stationären Tangenten besitzt. Die Anzahl der Doppeltangenten von (K_1) ist

$$\frac{1}{2}(n + m_1)(n + m_1 - 3) - p_1 + 1.$$

Die Ebene ε_1 ist singuläre Ebene der Kongruenz K. *Die Kongruenzstrahlen in ihr umhüllen eine Kurve (K_1) von der Ordnung $2(n + m_1 + p_1 - 1)$, der Klasse $n + m_1$, dem Geschlecht p_1, mit*

$$\frac{1}{2}(n + m_1)(n + m_1 - 3) - p_1 + 1 \quad \textit{Doppeltangenten.}$$

Durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 ergibt sich entsprechend in ε_2 eine singuläre Kurve (K_2). Die von einem Punkt der Schnittlinie $e \equiv (\varepsilon_1 \times \varepsilon_2)$ ausgehenden Kongruenzstrahlen sind die von e verschiedenen Tangenten an (K_1) und (K_2) und die n-fach zählende Gerade e. Es ist unschwer einzusehen, daß die Kurven (K_1) und (K_2) bei der allgemeinen Lage von ε_1 und ε_2 zueinander, und da die Kurven (E_1) und (E_2) irreduktibel sind (Nr. 1), nicht in (einfach oder mehrfach zählende) Strahlenbüschel und in Restkurven zerfallen können.

Außer ε_1 und ε_2 tritt in der Kongruenz K noch eine weitere singuläre Ebene nur dann auf, wenn die einer bestimmten Geraden der einen Ebene, z. B. g_1, entsprechende Kurve (G_2) in eine Gerade h_2 und eine Restkurve zerfällt, und wenn sich g_1 und h_2 schneiden. Die Ebene (g_1, h_2) ist dann eine singuläre Ebene der Kongruenz. Treten ∞^1 Gerade g_1 auf, deren entsprechende Kurven (G_2) in eine Gerade h_2 und eine Restkurve zerfallen, dann werden sich, wie man auch die Ebenen legen mag, immer solche zugeordnete Gerade g_1 und h_2 schneiden. Dies tritt z. B. dann ein, wenn eine singuläre Kurve eine Gerade ist. Es lassen sich also die sämtlichen

singulären Ebenen der Kongruenz nur dann angeben, wenn man speziellere Eigenschaften der Korrespondenz zwischen ε_1 und ε_2 kennt, als hier vorausgesetzt werden.

Da die Kurven, welche den Geraden der anderen Ebene entsprechen, als irreduktibel vorausgesetzt sind, können die singulären Ebenen nur in endlicher Zahl auftreten, die Kongruenz K besitzt keinen Torsus von singulären Ebenen.

23. *Die singulären Punkte der Kongruenz.* Die Fundamentalpunkte der beiden Ebenen sind singuläre Punkte der Kongruenz, und zwar die einzigen. Zunächst kann außerhalb der beiden Ebenen kein weiterer singulärer Punkt auftreten, denn unter den Erzeugenden des von ihm ausgehenden Kegels von Kongruenzstrahlen wären auch solche, welche die Schnittlinie $e \equiv (\varepsilon_1 \times \varepsilon_2)$ treffen. Nun verbindet aber jeder Kongruenzstrahl zwei entsprechende Punkte der beiden Ebenen, folglich wären die Schnittpunkte von e mit dem Kegel von Kongruenzstrahlen sich selbst entsprechende Punkte, diese wurden in Nr. 20 ausgeschlossen. Doch auch kein weiterer Punkt der Ebenen ε_1 und ε_2 kann singulärer Punkt sein, denn er wäre entweder Fundamentalpunkt oder Scheitel eines Strahlenbüschels, das zur singulären Kurve der betreffenden Ebene gehört. In Nr. 22 wurde aber darauf hingewiesen, daß sich von den singulären Kurven (K_1) und (K_2) keine Strahlenbüschel absondern.

Die Fundamentalpunkte der beiden Ebenen ε_1 und ε_2 *sind die einzigen singulären Punkte der Kongruenz* K.

K besitzt demnach auch keine Kurve von singulären Punkten (Leitkurve).

24. *Die Brennfläche von* K. Da keine Leitkurve von K und kein Torsus von singulären Ebenen auftritt, fällt der Ort der Brennpunkte mit dem Ort der Brennebenen in der Brennfläche zusammen. Brennpunkte der Kongruenz K sind in ε_1 zunächst die Punkte der Übergangskurve, außer diesen treten in ε_1 nur mehr die Brennpunkte der in ε_1 liegenden Kongruenzstrahlen, d. h. der Tangenten von (K_1) auf (Nr. 22). Die Kurve (K_1) selbst ist der Ort der einen Brennpunkte dieser Strahlen, die anderen Brennpunkte liegen auf der Kurve (E_1), welche in ε_1 der Schnittlinie e_2 von ε_1 und ε_2 entspricht. In jedem Punkt von (E_1) ist ε_1 Tangentialebene der Brennfläche, längs (E_1) wird die Brennfläche von ε_1 berührt. Sie hat demnach die Ordnung $\mu_0 = 2(m_2 + p_2 - 1) + 2(n + m_1 + p_1 - 1) + 2n$. Die Klasse der Brennfläche ergibt sich aus Nr. 18 Gl. (3).

Die Brennfläche der Kongruenz K *hat die Ordnung*

$$\mu_0 = 2(2n + m_1 + m_2 + p_1 + p_2 - 2)$$

und die Klasse $\nu_0 = 2(2n + p_1 + p_2 - 2)$, *sie schneidet* ε_1 *und* ε_2 *in den*

Übergangskurven und den Kurven (K_1) *bez.* (K_2), *und berührt die beiden Ebenen längs der Kurven* (E_1) *bez.* (E_2).

Aus Nr. 18 Gl. (2) folgt dann

$$\varrho + \delta = (n-1)(n+m_1+m_2) - (2n+p_1+p_2-2)$$

und da nach Nr. 21

$$\delta = d_1 + d_2 + \varphi_\alpha + \varphi_\beta$$

ist, folgt:

Die Kongruenz K *hat den Rang*

$$\varrho = (n-1)(n+m_1+m_2) - (2n+p_1+p_2+d_1+d_2+\varphi_\alpha+\varphi_\beta-2).$$

Nach Nr. 18 Gl. (4) ist

$$\pi = n + p_1 + p_2 - 1 \tag{5}$$

das Geschlecht eines ebenen Schnittes der Regelfläche, welche K mit einem linearen Komplex gemeinsam hat.

§ 5.

Die durch die Kongruenz K in irgend zwei Ebenen bestimmte Korrespondenz.

25. *Die Korrespondenz zwischen* α_1 *und* α_2. Die Ebenen ε_1 und ε_2 sind für die Kongruenz K als singuläre Ebenen spezielle Ebenen. α_1 und α_2 seien irgend zwei zur Kongruenz allgemein liegende Ebenen des Raumes. Zwischen diesen wird durch K eine Korrespondenz festgelegt, in der sich die Schnittpunkte eines Kongruenzstrahles mit α_1 und α_2 entsprechen.

Einem Punkt der einen Ebene sind $\mu = n + m_1 + m_2$ *Punkte der anderen Ebene zugeordnet.*

Alle Kongruenzstrahlen, welche eine Gerade der einen Ebene treffen, bilden eine Regelfläche, die der Schnitt des durch die Gerade bestimmten speziellen linearen Komplexes mit K ist, sie hat die Ordnung $\mu + \nu$ und das Geschlecht π (Nr. 18 und Nr. 24). Die Kurve, in der diese Regelfläche die andere Ebene schneidet, ist die der Geraden zugeordnete Kurve.

Den Geraden der einen Ebene entsprechen Kurven von der Ordnung $\mu + \nu = 2n + m_1 + m_2$ *und vom Geschlecht* $\pi = n + p_1 + p_2 - 1$ *in der anderen Ebene.*

Jeder Punkt der Schnittlinie $(\alpha_1 \times \alpha_2)$ fällt, als Punkt der einen Ebene aufgefaßt, mit seinen μ entsprechenden Punkten zusammen. In α_1 liegen ν Kongruenzstrahlen, der Schnittpunkt eines solchen Kongruenzstrahles von α_1 mit der Schnittlinie $(\alpha_1 \times \alpha_2)$ ist ein Fundamentalpunkt von α_2, dem dieser Kongruenzstrahl als Fundamentalkurve in einem Blatt der Ebene α_1 zugeordnet ist.

Auf der Schnittlinie $(\alpha_1 \times \alpha_2)$ *liegen in jeder der beiden Ebenen* α_1, α_2 *je* n *Fundamentalpunkte 1. Ordnung.*

26. *Ausgezeichnete Kurven in* α_1 *und* α_2. K hat eine Regelfläche von Doppelstrahlen von der Ordnung $\delta = d_1 + d_2 + \varphi_\alpha + \varphi_\beta$ (Nr. 21), ihre Schnitte mit den Ebenen α_1 und α_2 sind Kurven der beiden Ebenen mit den Eigenschaften der Kurven (D_1), (D_2) (Nr. 6, 7, 13).

Die Brennfläche von K schneidet α_1 und α_2 in den Übergangskurven, deren Ordnung demnach

$$\mu_0 = 2(2n + m_1 + m_2 + p_1 + p_2 - 2)$$

ist, ihre Klasse sei k', s' die Zahl ihrer stationären Tangenten. Von jedem Punkt der Übergangskurve von α_1 gehen zwei zusammenfallende Kongruenzstrahlen aus, deren Gesamtheit eine Regelfläche bildet. In jeder ihrer Erzeugenden fallen zwei Kongruenzstrahlen zusammen. Der Schnitt dieser Regelfläche mit α_1 besteht aus der Übergangskurve und den in α_1 liegenden Kongruenzstrahlen, diese doppelt zählend, weil jeder Brennpunkt eines solchen Strahles ein Punkt der Übergangskurve ist, von dem zwei im Kongruenzstrahl zusammenfallende Strahlen ausgehen. Die Regelfläche hat somit die Ordnung

$$\mu_0 + 2n = 2(3n + m_1 + m_2 + p_1 + p_2 - 2),$$

sie schneidet α_1 in der Doppelkurve. Wendet man die Gleichung (Ia) (Nr. 17) auf die Korrespondenz zwischen α_1 und α_2 an, dann sind für die Größen $\Sigma i\, \alpha_i$, n, m_1, p_1 bez. die Werte n, $2n + m_1 + m_2$, $n + m_1 + m_2$, $n + p_1 + p_2 - 1$ einzusetzen. Daraus folgt für die Ordnung n_2 der Doppelkurve der eben abgeleitete Wert.

27. *Ordnung und Klasse von* K. Wie in Nr. 20 aus der $[m_1, m_2]$-Korrespondenz zwischen ε_1 und ε_2 läßt sich die Ordnung und Klasse von K aus der $[n + m_1 + m_2, n + m_1 + m_2]$-Korrespondenz zwischen α_1 und α_2 ableiten, doch sind hier die Verhältnisse andere. Projiziert man aus irgend einem Punkt P des Raumes die beiden Ebenen α_1 und α_2 in eine Ebene β, dann ist in dieser durch die Beziehung von α_1 und α_2 eine Korrespondenz festgelegt, in der jedem Punkt in beiderlei Sinn $\alpha_0 = \beta_0 = n + m_1 + m_2$ Punkte entsprechen (doch nicht dieselben in beiderlei Sinn), einer Geraden eine Kurve von der Ordnung $\gamma_0 = 2n + m_1 + m_2$ zugeordnet ist. Die Projektion der Schnittlinie $(\alpha_1 \times \alpha_2)$ aus P liefert eine Gerade in β, die, weil jeder ihrer Punkte mit seinen sämtlichen entsprechenden zusammenfällt, als Koinzidenzkurve von der Ordnung $\delta_0 = n + m_1 + m_2$ zählt. Einer Geraden a_1 von α_1 ist eine Kurve (A_1) von der Ordnung $2n + m_1 + m_2$ zugeordnet, die im Schnittpunkt von a_1 mit $(\alpha_1 \times \alpha_2)$ einen $(n + m_1 + m_2)$-fachen sich selbst entsprechenden Punkt hat. Die Verbindungslinien zu-

geordneter Punkte von a_1 und (A_1) bilden eine Regelfläche von der Ordnung $2n + m_1 + m_2$. Läßt man a_1 in $(\alpha_1 \times \alpha_2)$ hineinrücken, dann folgt daraus, daß die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte in β, die der Koinzidenzkurve unendlich benachbart sind, eine Kurve von der Klasse $\varepsilon_0 = 2n + m_1 + m_2$ umhüllen. Die Anzahl der Koinzidenzen in β (d. h. die Ordnung von K), ist dann, wie bekannt

$$\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 - \delta_0 - \varepsilon_0 = n + m_1 + m_2.$$

Die Klasse n von K ergibt sich ohne weiteres, wenn man wieder berücksichtigt, daß jeder Punkt von $(\alpha_1 \times \alpha_2)$ mit seinen entsprechenden zusammenfällt.

§ 6.

Die Abbildung der Kongruenz K auf eine Fläche [Φ] eines linearen dreidimensionalen Raumes.

28. *Die Fläche* $[F]$. Die Liniengeometrie eines linearen dreidimensionalen Raumes R_3 kann bekanntlich als Punktgeometrie auf einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit 2. Grades $M_4^{(2)}$ in einem linearen Raum von fünf Dimensionen R_5 gedeutet werden. Den Schnitten der $M_4^{(2)}$ mit linearen Räumen*) von vier, drei, zwei Dimensionen entsprechen im R_3 beziehungsweise lineare Komplexe, lineare Strahlensysteme, Regelflächen 2. Ordnung. In jedem Punkt der $M_4^{(2)}$ gibt es einen berührenden vierdimensionalen Raum, seinem Schnitt mit der $M_4^{(2)}$ entspricht im Strahlenraum der spezielle lineare Komplex mit der dem Berührungspunkt entsprechenden Geraden als Achse. Auf der $M_4^{(2)}$ liegen ∞^5 gerade Punktreihen, diesen sind die ∞^5 Strahlenbüschel des R_3 zugeordnet. Durch jede solche Erzeugende der $M_4^{(2)}$ gehen zwei zweidimensionale Räume, die ganz der Fläche angehören, diesen zwei dreifach unendlichen Scharen zweidimensionaler Räume auf der $M_4^{(2)}$ entsprechen die ebenen Felder und Strahlenbündel des R_3.

Den ∞^2 Strahlen der Kongruenz K entsprechen auf der $M_4^{(2)}$ umkehrbar eindeutig ∞^2 Punkte, welche eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit $[F]$ bilden. In der Beziehung zwischen K und $[F]$ treten keine Fundamentalelemente auf.**) Jedem mehrfachen Strahl von K ist auf $[F]$ ein Punkt von derselben Vielfachheit zugeordnet, dies sind die einzigen mehrfachen Punkte von $[F]$. Da die Kongruenz K mit einem linearen Strahlensystem $\mu + \nu = 2n + m_1 + m_2$ Strahlen gemeinsam hat, liegen ebensoviele

*) Im folgenden soll unter Raum immer ein linearer Raum verstanden werden.

**) Das ist der Vorzug dieser Abbildung des Strahlenraumes vor der sonst vielfach gebrauchten Abbildung in die Punkte eines linearen vierdimensionalen Raumes.

Punkte von $[F]$ in einem dreidimensionalen Raum des R_5. Diese Fläche $[F]$ und damit auch die Kongruenz K sollen im folgenden auf eine Fläche $[\Phi]$ eines dreidimensionalen Raumes ein-eindeutig abgebildet werden.

29. *Die Fläche* $[\Phi]$. S_0 sei der Scheitel, α_0 die Ebene eines Strahlenbüschels des Raumes R_3, in dem K liegt. Das Strahlenbüschel soll keine spezielle Lage zu den beiden Ebenen ε_1 und ε_2 haben und keinen Strahl von K enthalten. Ihm entspricht auf der $M_4^{(2)}$ eine gerade Punktreihe g_0, welche keinen Punkt mit $[F]$ gemeinsam hat. Projiziert man die Punkte von $[F]$ aus g_0 durch Ebenen (durch zweidimensionale Räume), dann schneidet jede dieser Ebenen einen dreidimensionalen Raum R_3', der im R_5 enthalten ist, in einem Punkt, die Gesamtheit dieser projizierenden Ebenen schneidet den Raum R_3' in einer Fläche $[\Phi]$. Die Punkte von $[F]$ und $[\Phi]$ entsprechen sich umkehrbar eindeutig, ohne daß Fundamentalelemente auftreten, dieselbe Eigenschaft hat demnach nach Nr. 28 auch die durch $[F]$ vermittelte ein-eindeutige Beziehung zwischen den Strahlen von K und den Punkten von $[\Phi]$.

Eine Gerade des Raumes R_3' wird aus g_0 durch einen dreidimensionalen Raum projiziert, der mit $[F]$ $\mu + \nu$ Punkte gemein hat (Nr. 28), dies ist demnach die Ordnung von $[\Phi]$.

Einer in K enthaltenen Regelfläche entspricht auf $[\Phi]$ eine Kurve von der Ordnung der Regelfläche, denn eine Schnittebene von $[\Phi]$ wird aus g_0 durch einen vierdimensionalen Raum projiziert, dem im Strahlenraum ein linearer Komplex entspricht.

30. *Doppelkurven von* $[\Phi]$. Ein Doppelpunkt entsteht auf $[\Phi]$ nur dann, wenn die diesen Punkt aus g_0 projizierende Ebene zwei Punkte mit $[F]$ gemeinsam hat. Dies geschieht in zwei Fällen:

Entweder sie projiziert einen Doppelpunkt von $[F]$, dies führt auf eine (zerfallende) Doppelkurve von $[\Phi]$ von der Ordnung $\delta = d_1 + d_2 + \varphi_\alpha + \varphi_\beta$, die der Regelfläche von Doppelstrahlen der Kongruenz K entspricht (Nr. 21 und Nr. 28).

Oder die Ebene durch g_0 hat zwei getrennte Punkte mit $[F]$ gemeinsam. Eine Ebene β durch g_0 schneidet $M_4^{(2)}$ außer in g_0 noch in einer zweiten Geraden, die g_0 trifft, dieser zweiten Geraden entspricht im R_3 (in dem K liegt) ein Strahlenbüschel, das seinen Scheitel in α_0 hat (Nr. 29) und dessen Ebene durch S_0 hindurchgeht. Enthält dieses Büschel zwei Strahlen von K, dann schneidet β den Raum R_3' in einem Doppelpunkt von $[\Phi]$.

Die Ordnung der Regelfläche dieser Paare von Kongruenzstrahlen, die sich in einem Punkt von α_0 schneiden, während ihre Ebene durch S_0

hindurchgeht, soll bestimmt werden. Zu der Regelfläche gehören zunächst die ν Kongruenzstrahlen in α_0, und zwar jeder $\nu-1$-fach, da er mit jedem der $\nu-1$ übrigen die vorgeschriebene Bedingung erfüllt. Dasselbe gilt entsprechend von den μ Strahlen durch S_0, die je $\mu-1$-fach zählen. Ein Strahl l des Büschels (S_0, α_0) trifft diese Regelfläche demnach im $\mu(\mu-1)$-fach zählenden Punkt S_0 und in den Schnittpunkten von l mit den in α_0 liegenden Kongruenzstrahlen, die $\nu(\nu-1)$ Schnittpunkte von l mit der Regelfläche liefern. Weitere Schnittpunkte entstehen nur dann, wenn sich zwei Kongruenzstrahlen auf l schneiden, deren Verbindungsebene durch l hindurchgeht. Die Anzahl dieser Strahlenpaare ist gleich dem Rang ϱ der Kongruenz K, jedes liefert einen Doppelpunkt der Regelfläche auf l. Die Regelfläche hat also die Ordnung $\mu(\mu-1)+\nu(\nu-1)+2\varrho$. Zu der Regelfläche gehören auch die einzeln auftretenden vielfachen Strahlen von K.

Dieser Regelfläche entspricht auf $[\Phi]$ eine Doppelkurve, deren Ordnung gleich der halben Ordnung der Regelfläche ist. In der Tat bestimmt eine Ebene des R_3', aus g_0 projiziert, im Strahlenraum einen linearen Komplex, der das Strahlenbüschel (S_0, α_0) enthält. Gehört zu diesem linearen Komplex eine Erzeugende der Regelfläche, dann gehört zu ihm auch diejenige, welche sie in einem Punkt von α_0 trifft, während die Verbindungsebene der beiden Erzeugenden durch S_0 hindurchgeht.

Aus Nr. 29 und Nr. 30 ergibt sich:

Die Strahlen der Kongruenz K *können umkehrbar eindeutig den Punkten einer algebraischen Fläche* $[\Phi]$ *eines linearen dreidimensionalen Raumes zugeordnet werden, welche die Ordnung* $\mu+\nu=2n+m_1+m_2$ *hat, Doppelkurven von der Ordnungssumme* $\binom{\mu}{2}+\binom{\nu}{2}+\varrho+\delta$ *und keine Kuspidalkurven besitzt. Vielfache Punkte der Fläche erstehen nur durch die Doppelkurven.*

Die letzte Behauptung folgt aus der Ableitung der Doppelkurven. Eine Kuspidalkurve könnte nur durch eine Regelfläche stationärer Strahlen der Kongruenz K entstehen.*)

31. *Ebene Schnitte von* $[\Phi]$. Ein beliebiger ebener Schnitt von $[\Phi]$ hat nach dem eben Gesagten die Ordnung $\mu+\nu$, $\binom{\mu}{2}+\binom{\nu}{2}+\varrho+\delta$ Doppelpunkte und keine stationären Punkte, sein Geschlecht ist folglich

$$(\mu-1)(\nu-1)-(\varrho+\delta)=n+p_1+p_2-1=\pi$$

(Nr. 24), was auch direkt einzusehen ist, da einem ebenen Schnitt von $[\Phi]$ in K die Schnittregelfläche mit einem linearen Komplex entspricht,

*) Vgl. die zweite Anmerkung zu Nr. 21.

deren ebene Schnitte das Geschlecht π haben. Für die Klasse eines ebenen Schnittes von $[\Phi]$ ergibt sich

$$2(3n+m_1+m_2+p_1+p_2-2).$$

32. *Klasse von* $[\Phi]$. Irgend ein Ebenenbüschel des R_3' (in dem $[\Phi]$ liegt) wird aus g_0 durch ∞^1 vierdimensionale Räume projiziert, die einen dreidimensionalen Raum gemeinsam haben, d. h. durch ein Büschel vierdimensionaler Räume. Die ∞^1 vierdimensionalen Räume R_4', welche die $M_4^{(2)}$ in den ∞^1 Punkten von g_0 berühren, bilden ein solches Büschel und schneiden aus dem R_3' ein Büschel von Ebenen α aus, das zur Bestimmung der Klasse von $[\Phi]$ dienen soll. Dem Schnitt eines dieser R_4' mit der $M_4^{(2)}$ entspricht im Strahlenraum der spezielle lineare Komplex, welcher die dem Berührungspunkt zugeordnete Gerade a zur Achse hat (Nr. 28), dabei ist a ein Strahl des Büschels (S_0, α_0). Der Schnittkurve von α mit $[\Phi]$ entspricht die Regelfläche der Strahlen von K, welche a schneiden. Berührt nun α die Fläche $[\Phi]$, dann hat die Schnittkurve im Berührungspunkt einen einfachen Punkt von $[\Phi]$ zum Doppelpunkt, in der entsprechenden Regelfläche tritt also ein einfacher Kongruenzstrahl als Doppelerzeugende d auf. Jede Gerade in der Tangentialebene α von $[\Phi]$ durch den Berührungspunkt hat in diesem zwei unendlich benachbarte Punkte mit $[\Phi]$ gemeinsam, das heißt für die entsprechenden Gebilde im Strahlenraum: In jedem linearen Strahlensystem, das im speziellen linearen Komplex mit der Achse a enthalten ist und die Erzeugende d enthält, fallen in d zwei Strahlen der Kongruenz K zusammen. Das gilt speziell auch für das lineare Strahlensystem, das aus dem Strahlenbündel um den Schnittpunkt $(a \times d)$ und aus dem Strahlenfeld in der Ebene α_0 besteht, d. h. der Schnittpunkt $(a \times d)$ ist der eine Brennpunkt von d. Desgleichen muß auch das lineare Strahlensystem, das sich aus dem Strahlenbündel mit dem Mittelpunkt S_0 und aus dem Strahlenfeld der Ebene (a, d) zusammensetzt, d und einen zu d unendlich benachbarten Strahl enthalten. Daraus folgt, daß d von einem unendlich benachbarten Kongruenzstrahl in der Ebene (a, d) getroffen wird, die Ebene (a, d) ist die eine Brennebene von d, ihr Berührungspunkt mit der Brennfläche ist der Punkt $(a \times d)$.*) Dann ist aber a Tangente an die Schnittkurve von α_0 mit der Brennfläche. Umgekehrt führt jede Tangente a durch S_0 an diese Schnittkurve auf eine Ebene α des oben erwähnten Büschels, die Tangentialebene von $[\Phi]$ ist. D. h.

*) Würde d von einem unendlich benachbarten Strahl im Punkt $(a \times d)$ so getroffen, daß die Verbindungsebene der beiden Strahlen durch S_0 ginge, dann wäre d Torsalerzeugende, aber nicht Doppelerzeugende der Regelfläche.

Die Klasse der Fläche [Φ] *ist gleich der Klasse eines ebenen Schnittes der Brennfläche der Kongruenz* K.

33. *Stationäre Tangentialebenen von* [Φ]. Durch g_0 geht eine auf der $M_4^{(2)}$ liegende Ebene R_2', deren Punkte den Geraden der Ebene α_0 entsprechen (Nr. 28), R_2' schneidet den Raum R_3' in einem Punkt P. Die vierdimensionalen Räume R_4, welche $M_4^{(2)}$ in den Punkten von R_2' berühren, gehen alle durch g_0 und schneiden aus R_3' das Ebenenbündel mit dem Mittelpunkt P aus. Den Schnitten dieser R_4 mit der $M_4^{(2)}$ entsprechen im Strahlenraum die ∞^2 speziellen linearen Komplexe, deren Achsen die Geraden der Ebene α_0 sind. Ist in R_3' eine Ebene des Bündels durch P stationäre Tangentialebene der Fläche [Φ], dann führt sie nach dem vorigen im Strahlenraum auf einen speziellen linearen Komplex, dessen Achse stationäre Tangente der Schnittkurve von α_0 mit der Brennfläche der Kongruenz K ist. Daraus folgt:

Die Anzahl der stationären Tangentialebenen der Fläche [Φ] *durch einen Punkt ist gleich der Zahl der stationären Tangenten eines ebenen Schnittes der Brennfläche der Kongruenz* K.

Durch Nr. 31, 32, 33 sind die charakteristischen Zahlen eines Tangentialkegels an [Φ] bestimmt. Die Zahl der Doppeltangentialebenen, der Doppeltangenten, der stationären Tangenten von [Φ] durch einen Punkt kann jetzt leicht berechnet werden. Die sich dabei ergebende Zahl der Doppeltangentialebenen durch einen Punkt ist um n kleiner, als die Zahl der Doppeltangenten eines ebenen Schnittes der Brennfläche.*)

§ 7.

Die Beziehung zwischen den Ebenen ε_1, ε_2 und der Fläche [Φ].

34. *Beziehung zwischen* ε_1, ε_2 *und* [Φ]. Die Strahlen der Kongruenz K und die Punkte der Fläche [Φ] entprechen sich umkehrbar eindeutig. K besteht aus den Strahlen, welche die korrespondierenden Punkte der beiden Ebenen ε_1 und ε_2 verbinden. Die zwei entsprechenden Punkte der beiden Ebenen, welche ein Kongruenzstrahl verbindet, sollen „Bildpunkte“

*) Man könnte die Zahl der Doppeltangentialebenen durch einen Punkt ebenso ableiten, wie in Nr. 33 die der stationären Tangentialebenen, hätte aber zu berücksichtigen, daß die n Kongruenzstrahlen in α_0 zwar Doppeltangenten des Schnittes von α_0 mit der Brennfläche sind, doch nur zu einfachen Tangentialebenen von [Φ] führen. Denn ein solcher Kongruenzstrahl l ist Achse eines speziellen linearen Komplexes, dessen Schnittregelfläche mit der Kongruenz K *nur einen* einfachen Kongruenzstrahl zur Doppelerzeugenden hat, eben den Strahl l.

des Strahles in den beiden Ebenen heißen.*) Liegt ein Kongruenzstrahl außerhalb ε_1, dann ist der Schnittpunkt mit ε_1 sein Bildpunkt. Liegt er in ε_1, dann ist sein Bildpunkt in ε_1 der dem Schnittpunkt des Kongruenzstrahles mit der Schnittlinie $(\varepsilon_1 \times \varepsilon_2)$ in ε_1 entsprechende Punkt, durch den er hindurchgeht. Jeder Punkt von ε_1 ist Bildpunkt von m_2 Kongruenzstrahlen, denen ebensoviele Punkte auf $[\Phi]$ entsprechen, umgekehrt ist jedem Punkt von $[\Phi]$ der in ε_1 liegende Bildpunkt des entsprechenden Kongruenzstrahles zugeordnet. Zwischen den Punkten von ε_1 und von $[\Phi]$ besteht demnach eine $[1, m_2]$-Korrespondenz, entsprechend zwischen den Punkten von ε_2 und von $[\Phi]$ eine $[1, m_1]$-Korrespondenz. Irgend einem Punkt A_1 von ε_1 entsprechen m_2 Punkte auf $[\Phi]$, die je einen entsprechenden Punkt in ε_2 haben, diese m_2 Punkte $A_2^{(\nu)}$ in ε_2 sind die dem Punkt in der gegebenen $[m_1, m_2]$-Korrespondenz zugeordneten Punkte. D. h.

*Jede algebraische $[m_1, m_2]$-Korrespondenz zwischen den Punkten zweier Ebenen ε_1 und ε_2 kann dadurch erzeugt werden, daß eine einfach überdeckte algebraische Fläche $[\Phi]$ des dreidimensionalen Raumes zugleich auf die m_2-fach überdeckte Ebene ε_1 und auf die m_1-fach überdeckte Ebene ε_2 abgebildet wird.***)

Dies gilt für algebraische Korrespondenzen ohne jede Einschränkung, nur kann dann $[\Phi]$ eine Kuspidalkurve besitzen, während vielfache Punkte immer nur durch die vielfachen Kurven auftreten. Für das Folgende sollen wieder die Voraussetzungen von Nr. 4, 8, 19 gelten.

35. Jeder Fundamentalpunkt i^{ter} Ordnung (Nr. 3) von ε_1 in der $[m_1, m_2]$-Korrespondenz ist Spitze und Bildpunkt eines Kegels i^{ter} Ordnung von Kongruenzstrahlen, ihm entspricht auf $[\Phi]$ eine Kurve von der i^{ten} Ordnung (Schluß von Nr. 29). Andere Fundamentalpunkte treten in der Beziehung zwischen ε_1 und $[\Phi]$ nicht auf, $[\Phi]$ enthält keine solchen.

Die Punkte einer Geraden g_1 von ε_1 sind Bildpunkte für eine Regelfläche von Kongruenzstrahlen, welche ε_2 in der entsprechenden Kurve (G_2) und außerdem in den m_2 Kongruenzstrahlen schneidet, die vom Schnittpunkt von g_1 mit ε_2 als Bildpunkt von ε_1 ausgehen. Die Ordnung dieser Regelfläche ist also $n + m_2$, dies ist die Ordnung der Kurve auf $[\Phi]$, welche einer Geraden von ε_1 entspricht. Einem ebenen Schnitt von $[\Phi]$ ist in der Kongruenz K der Schnitt mit einem linearen Komplex zugeordnet, eine Regelfläche von der Ordnung $2n + m_1 + m_2$. $n + m_1$ Er-

*) Diese Bezeichnung gebraucht in ähnlicher Weise Th. Reye, Geometrie der Lage III (1910), 8. Vortrag.

**) G. Marletta geht in beiden Fällen a. a. O. auch von der Projektion einer Fläche auf zwei doppelt überdeckte Ebenen aus, doch wird dort die Fläche anders definiert als hier, auch die Abbildung in anderer Weise verwertet.

zeugende dieser Regelfläche liegen in ε_1, nämlich die Komplexstrahlen, welche zugleich Tangenten an die singuläre Kurve (K_1) von ε_1 sind (Nr. 22), die Bildpunkte der Regelfläche bilden somit eine Kurve von der Ordnung $n + m_2$, die dem ebenen Schnitt von $[\Phi]$ zugeordnete Kurve in ε_1.

Einem Punkt von ε_1 entsprechen m_2 Punkte auf $[\Phi]$. Von den einem Punkt der Übergangskurve von ε_1 zugeordneten Punkten fallen auf $[\Phi]$ zwei zusammen, diese ist also auch Übergangskurve in der Beziehung zwischen ε_1 und $[\Phi]$. Die gesamte Übergangskurve hat die Ordnung $2(m_2+p_2-1)$, die Klasse k_1, s_1 stationäre Tangenten, sie geht λ_1-mal durch einen Fundamentalpunkt der in ihr zusammenhängenden Blätter hindurch (Nr. 5). Die Übergangskurve 1. Art liefert, mit den in ε_2 entsprechenden Punkten der Doppelkurve (von der Ordnung n_2) verbunden, eine Regelfläche von Kongruenzstrahlen. Die Übergangskurve 2. Art führt auf Kegel von Kongruenzstrahlen mit den Spitzen in den zugeordneten Fundamentalpunkten 3. Art von ε_2. Die Ordnungssumme dieser Regelfläche und dieser Kegel von Kongruenzstrahlen ist

$$2(m_2+p_2-1)+n_2,$$

dies ist die Ordnung der Kurve auf $[\Phi]$, welche der Übergangskurve von ε_1 in der Weise entspricht, daß in jedem ihrer Punkte je zwei Punkte zusammenfallen, die einem Punkt der Übergangskurve entsprechen.*)

36. *Die Doppelkurven von* $[\Phi]$. Die Doppelkurven von $[\Phi]$ haben die Ordnungssumme $\binom{\mu}{2}+\binom{\nu}{2}+\varrho+\delta$ (Nr. 30). Diesen entsprechen in der Kongruenz K:

a) Die Regelfläche von der Ordnung d_1+d_2 von Doppelstrahlen der Kongruenz, welche die entsprechenden Punkte der Kurven (D_1) und (D_2) verbinden (Nr. 21). Die Bildkurve dieser Regelfläche in ε_1 ist die doppelt zählende Kurve (D_1) von der Ordnung d_1, d_2 Erzeugende der Regelfläche liegen in ε_1.

b) Die Kegel von Doppelstrahlen der Kongruenz von der Ordnungssumme φ_α mit den Spitzen in den Fundamentalpunkten 2. Art von ε_1. Jedem solchen Kegel entspricht der Fundamentalpunkt als Bildpunkt, diese Kegel führen auf keine Bildkurven.

c) Die Kegel von Doppelstrahlen der Kongruenz von der Ordnungssumme φ_β mit den Spitzen in den Fundamentalpunkten 2. Art von ε_2. Ihre Schnittkurven mit ε_1 von der Ordnungssumme φ_β sind doppelt zählend ihre Bildkurven.

*) Diese Kurve wäre eigentlich wieder als Doppelkurve der Korrespondenz zwischen ε_1 und $[\Phi]$ zu bezeichnen, doch würde diese Benennung zu Verwechslungen mit der Doppelkurve der Fläche $[\Phi]$, dem Ort der Doppelpunkte der Fläche führen.

d) Eine Regelfläche $[R]$ von der Ordnung $\mu(\mu-1)+\nu(\nu-1)+2\varrho$ von Kongruenzstrahlen, die sich zu je zweien in α_0 schneiden, während ihre Verbindungsebene durch S_0 hindurchgeht (Nr. 30). Auch $[R]$ hat eine Anzahl Erzeugende in ε_1. Dies sind erstens die doppelt zählenden Doppeltangenten von (K_1), die nicht zu den in a) und b) erwähnten Flächen gehören, ihre Zahl ist nach Nr. 22

$$\tfrac{1}{2}(n+m_1)(n+m_1-3)-p_1+1-d_2-\varphi_\alpha.$$

Zweitens sind es die einfach zählenden Tangenten von (K_1), die einen anderen Kongruenzstrahl auf der Schnittlinie l von ε_1 und α_0 so treffen, daß die Verbindungsebene der beiden Strahlen durch S_0 hindurchgeht. Die Kurve (K_1) hat die Klasse $n+m_1$, die Regelfläche der Kongruenzstrahlen, deren Bildpunkte auf l liegen, die Klasse m_2+n, sie haben $(n+m_1)(n+m_2)$ gemeinsame Tangentialebenen aus S_0. Zu diesen gehören die Ebenen, welche die n Strahlen projizieren, die Tangenten von (K_1) sind und ihren Bildpunkt auf l haben, die übrigen $(n+m_1)(n+m_2)-n$ gemeinsamen Tangentialebenen liefern die gesuchten Tangenten von (K_1). Zieht man von der Schnittkurve der Regelfläche $[R]$ mit ε_1 die eben erwähnten zwei Gruppen von Erzeugenden ab (die erste doppelt zählend), dann verbleibt als Bildkurve der Regelfläche $[R]$ in ε_1 eine Kurve von der Ordnung

$$(n+m_2-1)(n+m_2-2)+(n+m_1)(n+m_2)-n-2(p_2+d_1+\varphi_\beta).$$

Durch Addition aus a), c), d) ergibt sich für die Ordnung der Kurve in ε_1, welche der Doppelkurve von $[\Phi]$ entspricht:

$$2n^2+nm_1+3nm_2-4n+m_1m_2+m_2^2-3m_2-2p_2+2.$$

§ 8.

Folgerungen für die $[m_1, m_2]$-Transformation.

37. *Abbildung einer Fläche auf eine mehrfach überdeckte Ebene.* H. G. Zeuthen hat ein System von Formeln für die Abbildung einer algebraischen Fläche auf eine mehrfach überdeckte Ebene ε_1 angegeben*). Bezeichnet N die Vielfachheit der Ebene, A die Ordnung ihrer Übergangskurve, N' die Klasse und C' die Zahl der stationären Tangenten derselben, s die Ordnung der einer Geraden der Ebene auf der Fläche entsprechenden Kurve, n_1 die Ordnung der Fläche, n_1' ihre Klasse, a_1 die Klasse eines

*) H. G. Zeuthen. Études géometriques de quelques-uns des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un. VII. Addition sur la représentation d'une surface sur un plan multiple. Math. Ann. 4 (1871), S. 48.

ihrer ebenen Schnitte, c_1' die Klasse der abwickelbaren Fläche der stationären Tangentialebenen der Fläche, $A_{2,1}$ die Ordnung der Kurve auf der Fläche, in welcher die der Übergangskurve entsprechenden Punkte zusammenfallen, $b_{1,2}$ die Ordnung der Kurve, welche der Doppelkurve der Fläche entspricht, μ_1 die Vielfachheit der Fundamentalpunkte auf der Fläche als Punkte der Fläche, $\mu_{1,2}$ die Ordnung der ihnen in ε_1 entsprechenden Fundamentalkurve, μ_2 die Anzahl der Blätter von ε_1, in denen ein Punkt von ε_1 Fundamentalpunkt ist, $\mu_{2,1}$ die Ordnung der zugeordneten Fundamentalkurve auf der Fläche, ν_2 die Anzahl der Zweige der Übergangskurve, die durch einen Fundamentalpunkt der in ihr zusammenhängenden Blätter hindurchgehen, dann gelten die Formeln:

$$3N - A + s(n_1 - 4) - \sum[\mu_{1,2}(\mu_1 - 2)] - b_{1,2} = 0, \tag{6}$$

$$n_1' - 2a_1 + 3n_1 + \sum(\mu_1) = N' - 2A + 3N + \sum(\mu_2), \tag{7}$$

$$c_1' - 12a_1 + 24n_1 = C' - 12A + 24N + \sum(3\nu_2), \tag{8}$$

$$A_{2,1} = a_1 - 3n_1 + 3s - \sum(\mu_{2,1}). \tag{9}$$

Da die Fläche $[\Phi]$ keine Kuspidalkurve besitzt*) (Nr. 30), wurden die auf sie bezüglichen bei H. G. Zeuthen auftretenden Größen c_1, $c_{1,2}$, r_1, β_1, σ_1, χ_1, $\chi_{1,2}$ in den obigen Formeln gleich Null gesetzt. Vielfache Punkte entstehen nur durch die Doppelkurve; in den hier betrachteten Fällen liegen auf der Fläche keine Fundamentalpunkte oder die Fundamentalpunkte sind einfache Punkte der Fläche, daher wurden auch die weiteren Größen x_1, ε_1, η_1, ξ_1 nicht berücksichtigt.

38. *Anwendung auf* ε_1, ε_2 *und* $[\Phi]$. In der Beziehung zwischen ε_1 und $[\Phi]$ ist

$$N = m_2 \quad \text{(Nr. 34)},$$
$$A = 2(m_2 + p_2 - 1) \quad \text{(Nr. 35)},$$
$$N' = k_1 \quad \text{(Nr. 5)},$$
$$C' = s_1 \quad \text{(Nr. 5)},$$
$$s = n + m_2 \quad \text{(Nr. 35)},$$
$$n_1 = 2n + m_1 + m_2 \quad \text{(Nr. 30)},$$
$$a_1 = 2(3n + m_1 + m_2 + p_1 + p_2 - 2) \quad \text{(Nr. 31)},$$

*) Eine Kuspidalkurve würde aus einer Regelfläche von stationären Strahlen der Kongruenz K entstehen. Dann wären die Formeln von H. G. Zeuthen nicht ohne weiteres anwendbar, weil in diesen vorausgesetzt wird, daß die zwei Punkte in der Ebene, die einem Punkt der Rückkehrkurve entsprechen, getrennt oder in bestimmter Richtung unendlich benachbart sind, während sie hier in jeder Richtung zusammenfallen würden. Dies führt auf den bei H. G. Zeuthen a. a. O. Nr. 3 ausgenommenen Fall, daß sich zwei Kuspidalkurven entsprechen.

$$A_{2,1} = 2(m_2 + p_2 - 1) + n_2 \quad \text{(Nr. 35)},$$
$$b_{1,2} = 2n^2 + nm_1 + 3nm_2 - 4n + m_1 m_2 + m_2^2 - 3m_2 - 2p_2 + 2 \quad \text{(Nr. 36)},$$
$$\mu_1 = \mu_{1,2} = 0 \quad \text{(Nr. 35)},$$
$$\sum \mu_2 = \sum \varkappa_1 \quad \text{(Nr. 2, 3)},$$
$$\sum \mu_{2,1} = \sum i\alpha_i \quad \text{(Nr. 3)},$$
$$\sum \nu_2 = \sum \lambda_1 \quad \text{(Nr. 5)}.$$

Durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 erhält man die entsprechenden Größen für die Beziehung zwischen ε_2 und $[\Phi]$.

39. Gl. (6) ist identisch erfüllt. Gl. (9) liefert für ε_1 und ε_2 die in Nr. 17 angegebenen Gleichungen

(Ia) $$\boldsymbol{\sum i\alpha_i = 3n - m_1 + 2p_1 - n_2 - 2},$$

(Ib) $$\boldsymbol{\sum i\beta_i = 3n - m_2 + 2p_2 - n_1 - 2}.$$

Aus Gl. (7) ergibt sich für die beiden Ebenen

$$n_1' = \sum \varkappa_1 + 6n + m_1 + 4p_1 + k_1 - 4,$$
$$n_1' = \sum \varkappa_2 + 6n + m_2 + 4p_2 + k_2 - 4.$$

Hieraus folgt:

(II) $$\boldsymbol{\sum \varkappa_1 + m_1 + 4p_1 + k_1 = \sum \varkappa_2 + m_2 + 4p_2 + k_2}.$$

Gl. (8) nimmt für ε_1 und ε_2 die Form an

$$c_1' = 3\sum \lambda_1 + 24n + 24p_1 + s_1 - 24,$$
$$c_1' = 3\sum \lambda_2 + 24n + 24p_2 + s_2 - 24,$$

d. h.

(III) $$\boldsymbol{3\sum \lambda_1 + 24p_1 + s_1 = 3\sum \lambda_2 + 24p_2 + s_2}.$$

Die Formeln (Ia), (Ib), (II), (III) gelten unabhängig von den Voraussetzungen in Nr. 8b und Nr. 19.

40. *Rationale und birationale Transformationen.* Für den Fall $m_1 = 1$ erhält man eine rationale Transformation der Ebenen ε_1 und ε_2. Es treten keine Kurven (D_1) und (D_2) auf, nur ε_1 besitzt eine Übergangskurve, nur ε_2 eine Doppelkurve, ferner ist $p_1 = 0$. Die entsprechenden Formeln lauten dann

$$\sum i\alpha_i = 3(n-1) - n_2,$$
$$\sum i\beta_i = 3n - m_2 + 2(p_2 - 1),$$
$$\sum \varkappa_1 + k_1 + 1 = \sum \varkappa_2 + m_2 + 4p_2,$$
$$3\sum \lambda_1 + s_1 = 24p_2.$$

Für birationale Tansformationen folgt

$$\sum i\,\alpha_i = \sum i\,\beta_i = 3(n-1),$$
$$\sum \alpha_i = \sum \beta_i,$$

während beide Seiten der Gl. (III) verschwinden.

41. *Beziehung zwischen* α_1, α_2 *und* $[\Phi]$. Durch die Kongruenz K ist die Fläche $[\Phi]$ auch auf die Ebenen α_1 und α_2 (§ 5) abgebildet. Auch hier ist einem Punkt von $[\Phi]$ in einer der Ebenen, etwa α_1, der Durchstoßpunkt des entsprechenden Kongruenzstrahles zugeordnet. Für die n in α_1 liegenden Kongruenzstrahlen ist jeder Punkt des Strahles Schnittpunkt mit der Ebene, die ihnen entsprechenden n einfachen Punkte von $[\Phi]$ sind also Fundamentalpunkte in der Beziehung zwischen α_1 und $[\Phi]$, denen je eine Gerade in der Ebene α_1 (eben der zugeordnete Kongruenzstrahl) entspricht. Da die Kongruenz K keine Leitkurve besitzt, treten in der Ebene α_1 keine Fundamentalpunkte auf.

In den Formeln (6) bis (9) ist hier zu setzen:

$$N = \mu = n + m_1 + m_2 \quad \text{(Nr. 25)},$$
$$A = \mu_0 = 2(2n + m_1 + m_2 + p_1 + p_2 - 2) \quad \text{(Nr. 26)},$$
$$N' = k' \quad \text{(Nr. 26)},$$
$$C' = s' \quad \text{(Nr. 26)},$$
$$s = \mu + \nu = 2n + m_1 + m_2,$$
$$n_1 = 2n + m_1 + m_2,$$
$$a_1 = 2(3n + m_1 + m_2 + p_1 + p_2 - 2),$$
$$A_{2,1} = \mu_0 + 2n = 2(3n + m_1 + m_2 + p_1 + p_2 - 2),$$
$$b_{1,2} = \mu(\mu-1) + \nu(\nu-1) + 2(\varrho + \delta)$$
$$= 4(n-1)^2 + (4n + m_1 + m_2 - 3)(m_1 + m_2) - 2(p_1 + p_2),$$
$$\mu_1 = \mu_{1,2} = 1,$$
$$\mu_2 = \mu_{2,1} = \nu_2 = 0,$$
$$\sum(\mu_1) = n,$$
$$\sum[\mu_{1,2}(\mu_1 - 2)] = -n.$$

Die Gl. (6) und (9) sind identisch erfüllt, aus (7) folgt, daß die Klasse eines ebenen Schnittes der Brennfläche gleich der Klasse von $[\Phi]$ ist, Gl. (8) sagt aus, daß die Anzahl der stationären Tangenten eines ebenen Schnittes der Brennfläche gleich ist der Klasse der abwickelbaren Fläche der stationären Tangentialebenen von $[\Phi]$. Diese beiden Ergebnisse wurden auf anderem Weg in Nr. 32 und Nr. 33 abgeleitet.

42. *Schnitt von* K *mit einem Büschel linearer Komplexe.* Den Schnittregelflächen der Kongruenz K mit einem der ∞^3 Büschel linearer Komplexe entspricht auf $[\Phi]$ eine rationale Schar von Kurven. Durch einen Punkt von $[\Phi]$ geht im allgemeinen eine Kurve der Schar hindurch. Einer solchen Kurve entspricht in ε_1 und ε_2 je eine an jedem Punkt in einem Blatt der Ebene verlaufende Kurve, diese beiden Kurven sind demnach punktweise eineindeutig aufeinander bezogen. Durch einen Punkt P_1 von ε_1 gehen m_2 Kurven der Schar, dem Punkt entspricht als Punkt jeder dieser Kurven ein Punkt auf der zugeordneten Kurve in ε_2, so erhält man die m_2 dem Punkt P_1 entsprechenden Punkte $P_2^{(\nu)}$ in ε_2.

Jede algebraische $[m_1, m_2]$*-Korrespondenz zwischen zwei Ebenen läßt sich dadurch erzeugen, daß man den Kurven einer rationalen Schar vom Index* m_2 *der einen Ebene die Kurven einer rationalen Schar vom Index* m_1 *in der anderen Ebene umkehrbar eindeutig zuordnet und die Punkte zweier zugeordneter Kurven eineindeutig aufeinander bezieht.*

Dies gilt ganz allgemein für beliebige $[m_1, m_2]$-Transformationen, während von jetzt ab wieder die bisherigen Einschränkungen vorausgesetzt werden sollen.

43. Die speziellen linearen Komplexe, deren Achsen die Geraden eines Strahlenbüschels (S, α) mit dem Scheitel S in der Ebene α sind, bilden ein Büschel linearer Komplexe, das der Einfachheit halber den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt werden soll. l sei ein Strahl des Büschels (S, α). Der durch ihn bestimmte spezielle lineare Komplex schneidet die Kongruenz K in einer Regelfläche vom Grad $\mu + \nu = 2n + m_1 + m_2$, von deren Erzeugenden $n + m_1$ in ε_1 liegen, es sind dies die Tangenten aus dem Schnittpunkt $(l \times \varepsilon_1)$ an die Kurve (K_1) (Nr. 22). Die Restschnittkurve (C_1) von der Ordnung $n + m_2$ ist durch die Erzeugenden der Regelfläche punktweise eineindeutig auf die Restschnittkurve (C_2) derselben Regelfläche mit ε_2 von der Ordnung $n + m_1$ bezogen. Das Geschlecht dieser Kurven ist nach Nr. 24

$$\pi = n + p_1 + p_2 - 1.$$

(C_1) hat in jedem Fundamentalpunkt i^{ter} Ordnung von ε_1 einen i-fachen Punkt, außer durch diese Fundamentalpunkte gehen die ∞^1 Kurven (C_1) noch je einfach durch die $n + m_1 + m_2$ Schnittpunkte der von S ausgehenden Kongruenzstrahlen mit ε_1 hindurch und je einfach durch die n Schnittpunkte der in α liegenden Kongruenzstrahlen mit ε_1. Der Schnittpunkt $(l \times \varepsilon_1)$ ist für die Kurve (C_1) ein m_2-facher Punkt. Jedem Punkt P_1 von ε_1 entsprechen m_2 Punkte $P_2^{(\nu)}$ in ε_2, die Schnittpunkte der Strahlen $(P_1, P_2^{(\nu)})$ mit α bestimmen m_2 Gerade l des Büschels (S, α) und diese die m_2 Kurven (C_1) durch P_1. Ist ein Punkt von ε_1 μ-facher Punkt für eine

Kurve (C_1), dann gehen durch ihn nur $m_2 - \mu$ oder unendlich viele weitere Kurven (C_1) hindurch.

Berührt eine Gerade g_1 in ε_1 eine Kurve (C_1), dann gehen von zwei unendlich benachbarten Punkten von g_1 zwei unendlich benachbarte Kongruenzstrahlen aus, welche die (C_1) entsprechende Gerade l des Büschels (S, α) treffen. Die Regelfläche der Kongruenzstrahlen, welche die Punkte von g_1 mit ihren entsprechenden auf (G_2) in ε_2 verbinden, hat die Ordnung $n + m_2$, keine stationären Erzeugenden, das Geschlecht ihrer ebenen Schnitte ist p_2. Dann haben ihre Schnitte mit der Ebene α die Klasse $2(n + m_2 + p_2 - 1)$, daraus folgt:

Eine beliebige Gerade in ε_1 wird von $2(n + m_2 + p_2 - 1)$ Kurven (C_1) berührt.

Die Vertauschung der Indizes 1 und 2 gibt wieder die entsprechenden Ergebnisse für ε_2.

§ 9.

Transformationen, die sich in rationale und birationale Transformationen zerlegen lassen.

44. *Zusammensetzung rationaler Transformationen.* Es seien zwei rationale Transformationen gegeben, eine $[1, m_1]$-Korrespondenz zwischen zwei Ebenen α_1 und α_2 und eine $[1, m_2]$-Korrespondenz zwischen zwei Ebenen β_1 und β_2. Aus diesen läßt sich auf zweierlei Art eine $[m_1, m_2]$-Transformation zusammensetzen:

a) Man stellt zwischen den (mehrfach überdeckten) Ebenen α_1 und β_1 eine birationale Transformation her. Dann entspricht einem Punkt von α_2 ein Punkt von α_1, diesem ein Punkt in β_1 und diesem sind m_2 Punkte in β_2 zugeordnet, dies liefert eine $[m_1, m_2]$-Korrespondenz zwischen α_2 und β_2.

b) Man fügt eine birationale Transformation zwischen den Ebenen α_2 und β_2 ein. Dann sind einem Punkt von α_1 m_1 Punkte in α_2 zugeordnet, diesen m_1 Punkte in β_2 und diesen entsprechen m_1 Punkte in β_1, es ergibt sich eine $[m_1, m_2]$-Transformation zwischen β_1 und α_1.

Diese beiden Typen von $[m_1, m_2]$-Transformationen sollen näher betrachtet werden.

45. *Die erste Art der Zusammensetzung.* Einem Punkt von α_1 sind m_1 Punkte in α_2 zugeordnet und jeder dieser m_1 Punkte führt in der $[m_1, m_2]$-Korrespondenz auf dieselben m_2 Punkte in β_2, umgekehrt liefert jeder der m_2 Punkte in β_2, die einem Punkt in β_1 entsprechen, dieselben m_1 Punkte in α_2. In α_2 treten ∞^1 Gruppen von je m_1 Punkten auf, in β_2 ∞^1 Gruppen von je m_2 Punkten und diese Gruppen sind eineindeutig auf-

einander bezogen, es besteht eine involutorische $[m_1, m_2]$-Korrespondenz zwischen den Ebenen α_2 und β_2. Ist eine involutorische $[m_1, m_2]$-Transformation zweier Ebenen α_2 und β_2 gegeben, dann lassen sich, da jede Involution in einer Ebene rational ist*), die Gruppen von je m_1 Punkten in α_2 den Punkten einer Ebene α_1 umkehrbar eindeutig zuordnen, ebenso die Gruppen von je m_2 Punkten in β_2 den Punkten einer Ebene β_1 und zwischen α_1 und β_1 besteht dann eine birationale Transformation. D. h.

Jede involutorische $[m_1, m_2]$-Korrespondenz zwischen zwei Ebenen läßt sich in die Folge der Transformationen $[m_1, 1]$, $[1, 1]$, $[1, m_2]$ zerlegen.

Dies gilt ohne Einschränkung.

46. *Die zweite Art der Zusammensetzung.* Aus Nr. 44, b) folgt, daß jedem Punkt von α_2 (und β_2) ein Paar von Punkten zugeordnet ist, die sich in der $[m_1, m_2]$-Korrespondenz zwischen α_1 und β_1 entsprechen, umgekehrt ist auch jedem Paar entsprechender Punkte in β_1 und α_1 ein Punkt von α_2 zugeordnet. Die Fläche $[\Phi]$, deren Punkte den Kongruenzstrahlen von K und damit den Paaren entsprechender Punkte in β_1 und α_1 umkehrbar eindeutig zugeordnet sind, ist in diesem Fall eineindeutig auf die Ebene α_2 abbildbar, sie ist rational. Bei der ersten Art der Zusammensetzung braucht $[\Phi]$ nicht rational zu sein. Ist umgekehrt $[\Phi]$ rational, dann läßt sich durch die Abbildung der Fläche in eine Ebene α_2 die $[m_1, m_2]$-Korrespondenz nach der zweiten Art zerlegen (die eingeschaltete birationale Transformation fällt dabei weg). Eine $[1, \mu]$ und eine $[1, \nu]$-Transformation zusammengesetzt liefern eine $[1, \mu\nu]$-Transformation, also wieder eine rationale; birationale Transformationen ändern an der Rationalität von $[\Phi]$ nichts. Dies gibt zusammengefaßt:

Ist bei einer $[m_1, m_2]$-Korrespondenz die Fläche $[\Phi]$ rational, dann läßt sich die Korrespondenz in die Folge der Transformationen $[1, m_2]$, $[m_1, 1]$ zerlegen. Setzt man eine $[m_1, m_2]$-Korrespondenz aus einer Folge von rationalen und birationalen Transformationen zusammen, dann ist die Fläche $[\Phi]$ immer dann rational, wenn bei der Zusammensetzung nie zwei mehrfach überdeckte Ebenen umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen sind.

Dies gilt ohne einschränkende Voraussetzungen für alle $[m_1, m_2]$-Korrespondenzen.

Die Folge der Transformationen ist in diesem Fall

$$[1, \mu_1], [1, \mu_2] \cdots [1, \mu_{m-1}], [1, \mu_m], [\nu_n, 1][\nu_{n-1}, 1] \cdots [\nu_2, 1][\nu_1, 1].$$

Birationale Transformationen können beliebig eingefügt werden.

---

*) G. Castelnuovo. Sulla razionalità delle involuzioni piane. Math. Ann. 44 (1894), S. 125.

47. *Rationalität von* [Φ]. Die Rationalität von [Φ] steht im engsten Zusammenhang mit der Zerlegbarkeit der $[m_1, m_2]$-Korrespondenz in rationale Transformationen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine algebraische Fläche rational ist, sind

$$p_n = 0, \quad P_2 = 0,^*)$$

dabei bedeutet p_n das numerische Flächengeschlecht, P_2 das „Doppelgeschlecht" (bigenre). Die erste Bedingung läßt sich in eine solche für die Korrespondenz verwandeln: Es ist für die Fläche [Φ]

$$24p_n = c_1' - 12a_1 + 24n_1 - 24^{**}).$$

Dann ergibt sich als notwendige Bedingung für die Rationalität von [Φ] aus Nr. 38 und Nr. 39

(IVa) $$3\sum\lambda_1 + s_1 - 24p_2 = 0,$$

(IVb) $$3\sum\lambda_2 + s_2 - 24p_1 = 0.$$

Vermöge Nr. 39 Gl. (III) zieht für die hier betrachteten $[m_1, m_2]$-Korrespondenzen eine der beiden Gleichungen (IV) die andere nach sich.

Das Verschwinden des Doppelgeschlechts der Fläche läßt sich nicht als Bedingung für die $[m_1, m_2]$-Transformation aussprechen, die Fläche [Φ] muß im einzelnen Fall, wenn die Gleichungen (IV) erfüllt sind, auf Grund der speziellen Eigenschaften der gegebenen Transformation auf ihre Rationalität hin untersucht werden. Die Fläche [Φ] von der Ordnung $2n + m_1 + m_2$ besitzt Doppelkurven, aber keine Kuspidalkurven und keine vielfachen Punkte außerhalb der Doppelkurve (Nr. 30). Dann ist die Bedingung des Verschwindens des Doppelgeschlechts gleichbedeutend mit der Aussage, daß es keine Flächen von der Ordnung

$$2(2n + m_1 + m_2 - 4)$$

gibt, welche durch die Doppelkurve von [Φ] doppelt hindurchgehen (solche Flächen ausgenommen, die [Φ] enthalten).***)

Ist eine der Zahlen m_1, m_2 gleich 2, dann ist die eine Ebene eine Doppelebene. Aus der Übergangskurve in dieser Ebene läßt sich die notwendige und hinreichende Bedingung für die Rationalität von [Φ] angeben†), sie lautet: Die Übergangskurve muß sich durch eine birationale Transformation der Ebene auf einen der folgenden Fälle zurückführen lassen:

*) G. Castelnuovo. Sulle superficie di genere zero. Soc. Ital. Scienze Mem. 3, 10 (1896), Nr. 14.

**) H. G. Zeuthen a. a. O. S. 41.

***) G. Castelnuovo a. a. O. Nr. 11 und Nr. 14.

†) M. Noether. Über die ein-zweideutigen Ebenentransformationen.

a) eine Kurve 4. Ordnung,

b) eine Kurve 6. Ordnung mit zwei unendlich benachbarten dreifachen Punkten,

c) eine Kurve $2m^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $2m-2$-fachen Punkt.

Dies liefert (unabhängig von den bisherigen Voraussetzungen) die Fälle, in denen sich eine $[2, \nu]$-Korrespondenz auf zwei rationale Transformationen zurückführen läßt.

48. *Die Kurven* (G_2) *haben das Geschlecht* 0, 1 *oder* 2. Es sei eine $[m_1, m_2]$-Transformation gegeben, in der den Geraden g_1 der Ebene ε_1 rationale Kurven (G_2) in ε_2 entsprechen. Die Kongruenzstrahlen von K, welche die Punkte von g_1 mit den entsprechenden auf (G_2) verbinden, bilden dann eine rationale Regelfläche. Greift man ein Büschel von Strahlen g_1 in ε_1 heraus, dann führt dieses auf eine einfach unendliche rationale Schar rationaler Regelflächen, von denen durch jeden Kongruenzstrahl eine hindurchgeht, nämlich diejenige, deren Gerade g_1 den Bildpunkt des Kongruenzstrahles in ε_1 enthält. Den Regelflächen entspricht auf der Fläche $[\Phi]$ eine lineare einfach unendliche Schar von rationalen Kurven, dann ist $[\Phi]$ rational*). Daraus folgt (ohne Einschränkungen):

Entsprechen in einer $[m_1, m_2]$*-Transformation den Geraden der einen Ebene, etwa* ε_1*, rationale Kurven in der anderen Ebene* ε_2 *(ohne daß den Geraden von* ε_2 *rationale Kurven in* ε_1 *zugeordnet zu sein brauchen), dann läßt sich die Korrespondenz in die Transformationen* $[1, m_2]$, $[m_1, 1]$ *zerlegen.*

Sind den Geraden g_1 Kurven (G_2) vom Geschlecht $p_2 = 1$ zugeordnet, dann bilden die Kongruenzstrahlen von K, welche die Punkte von g_1 mit den entsprechenden auf (G_2) verbinden, elliptische Regelflächen. Durch zwei Kongruenzstrahlen geht eine dieser Regelflächen hindurch. Die ∞^2 Geraden g_1 führen so auf ein lineares zweifach unendliches System von elliptischen Kurven auf der Fläche $[\Phi]$. Dann ist die Fläche $[\Phi]$ entweder rational oder umkehrbar eindeutig auf eine elliptische Regelfläche abbildbar**). Im letzteren Falle ist das numerische Flächengeschlecht von $[\Phi]$, das bei eineindeutigen Transformationen erhalten bleibt, nicht gleich Null. Da eine der Gleichungen (IV) die andere nach sich zieht und beide Gleichungen die Bedingung für das Verschwinden des numerischen Flächengeschlechtes angeben, folgt hieraus unter den Voraussetzungen von Nr. 4, 8a, 8c:

Sind in einer $[m_1, m_2]$*-Transformation den Geraden der einen der beiden Ebenen, etwa* ε_1*, elliptische Kurven in der anderen Ebene* ε_2 *zu-*

*) M. Noether. Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen. Math. Ann. 3 (1871), S. 161.

**) G. Castelnuovo. Sulle superficie algebriche che contegono una rete di curve iperellitiche. Rom. Acc. Linc. Rend. (5) 3_1 (1894), S. 473.

geordnet und ist eine der beiden Gleichungen (IV) *erfüllt, dann läßt sich die Transformation aus den beiden Transformationen* $[1, m_2]$, $[m_1, 1]$ *zusammensetzen.*

Enthält eine Fläche eine lineare Schar von Kurven vom Geschlecht 2 von der Eigenschaft, daß durch $r \geqq 2$ Punkte *eine* Kurve der Schar hindurchgeht und daß sich irgend zwei allgemeine Kurven der Schar in mehr als zwei beweglichen Punkten schneiden, dann ist die Fläche umkehrbar eindeutig entweder in die Ebene oder in eine Regelfläche abbildbar, deren ebene Schnitte das Geschlecht 1 oder 2 haben.*) Ist das Geschlecht der Kurven (G_2) $p_2 = 2$ und ist $m_2 > 2$, dann sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt. Daraus ergibt sich ähnlich wie im vorigen Fall (wieder mit den Einschränkungen von Nr. 4, 8 a, 8 c):

Entsprechen in einer $[m_1, m_2]$*-Transformation einem Punkt der einen der beiden Ebenen, etwa* ε_1, $m_2 > 2$ *Punkte in der anderen Ebene, haben die den Geraden dieser Ebene zugeordneten Kurven* (G_2) *das Geschlecht* $p_2 = 2$ *und ist eine der beiden Gleichungen* (IV) *erfüllt, dann läßt sich die Transformation aus den beiden Transformationen* $[1, m_2]$, $[m_1, 1]$ *zusammensetzen.*

Erlangen, 4. Juli 1911.

*) G. Castelnuovo a. a. O.